Maria Borowska

WSPOMAGANIE PROCESU ZARZĄDZANIA USŁUGAMI NA PODSTAWIE PRAW FUNKCJONOWANIA SYSTEMU LOGISTYCZNEGO

Издателство на Българската академия на науките
"Проф. Марин Дринов"
Professor Marin Drinov Publishing House of BAS

Sofia 2020

Autor
Dr Maria Borowska
Państwowa Uczelnia Zawodowa prof. Stanisława Tarnowskiego w Tarnobrzegu

Recenzenci

Prof. zw., dr hab. Tadeusz Galanc
Politechnika Wrocławska

Prof. ucz., dr hab. Igor Britchenko
Państwowa Uczelnia Zawodowa prof. Stanisława Tarnowskiego w Tarnobrzegu

Prof. ucz., dr hab. Tetiana Cherniavska
Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Koninie

ISBN: 978-619-245-073-1

© *Copyright by Maria Borowska*

Sofia 2020

Издателство на Българската академия на науките
"Проф. Марин Дринов"
Professor Marin Drinov Publishing House of BAS

Maria Borowska

WSPOMAGANIE PROCESU ZARZĄDZANIA USŁUGAMI NA PODSTAWIE PRAW FUNKCJONOWANIA SYSTEMU LOGISTYCZNEGO

SPIS TREŚCI

WSTĘP **4**
CZĘŚĆ I **6**
1. Wybrane ilościowe (matematyczne) modele w logistyce. **6**
2. Podstawowe kierunki badań w teorii i praktyce prognozowania **17**
CZĘŚĆ II **18**
1. Opis badanego systemu logistycznego **18**
2. Analiza funkcjonowania systemu logistycznego w przypadku zagregowanego procesu dostawy produktu. **25**
2.1. Stan pośredni procesu opisującego poziom zapasów. 27
2.1.1. Prawdopodobieństwa warunkowe w przypadku stanu pośredniego. 29
2.1.2. Gęstości rozkładów prawdopodobieństwa, a intensywności procesu wejścia podsystemu *M*. 33
2.2. Bariera dolna procesu opisującego poziom zapasów. 36
2.2.1. Prawdopodobieństwa warunkowe w przypadku bariery dolnej. 38
2.2.2. Bariera dolna, a intensywności procesu sterującego poziomem zapasów... 40
2.3. Bariera górna procesu opisującego poziom zapasów. 42
2.3.1. Prawdopodobieństwa warunkowe w przypadku bariery górnej. 44
2.3.2. Bariera górna, a intensywności procesu sterującego poziomem zapasów... 46
3. Probabilistyczny opis funkcjonowania systemu logistycznego *S*(*za*). **48**
4. Ilościowe charakterystyki wąskiego gardła i inne wielkości opisujące działanie systemu *S*(*za*). **51**
5. Prognozowanie procesów opisujących funkcjonowanie systemu logistycznego *S*(*za*). **62**
6. Analiza funkcjonowania systemu logistycznego w przypadku strukturalnego procesu dostawy produktu. **73**
6.1. Nieekstremalny stan poziomu zapasów. 75
6.1.1. Prawdopodobieństwa warunkowe w przypadku stanu nieekstremalnego... 77
6.1.2. Gęstości rozkładów prawdopodobieństwa, a intensywności strukturalnego procesu zaopatrzenia podsystemu *M*. 82
6.2. Stan graniczny dolny poziomu zapasów 85
6.2.1. Prawdopodobieństwa warunkowe w przypadku dolnego stanu granicznego. 86
6.2.2. Stan graniczny dolny, a intensywności strukturalnego procesu zaopatrzenia podsystemu *M*. 89
6.3. Stan graniczny górny poziomu zapasów. 92
6.3.1. Prawdopodobieństwa warunkowe w przypadku górnego stanu granicznego. 93
6.3.2. Stan graniczny górny, a intensywności strukturalnego procesu zaopatrzenia podsystemu *M*. 96
7. Probabilistyczny opis funkcjonowania systemu logistycznego *S*(*st*). **99**

8. Prognozowanie charakterystyk opisujących działanie systemu logistycznego *S*(*st*). 103
ZAKOŃCZENIE 110
SPIS RYSUNKÓW 113
SPIS TABEL 114
BIBLIOGRAFIA 115

WSTĘP

Rozwój nowoczesnego, innowacyjnego i efektywnego zarządzania i planowania jest obecnie niemożliwy bez wykorzystania metod statystyczno-matematycznych wspieranych nowoczesną informatyką.

Klasyczne sposoby zarządzania usługami w logistyce, oparte jedynie o intuicję oraz doświadczenie decydenta, stają się coraz mniej efektywne, a coraz częściej nietrafne i nieuzasadnione. Obserwuje się zatem wzrost zainteresowania metodami usprawniającymi proces zarządzania. Możliwości tych upatruje się w coraz powszechniejszym stosowaniu metod ilościowych zwanych matematycznymi oraz informatyki.

Postępująca matematyzacja i informatyzacja nauki wymusza budowanie i stosowanie ilościowych (matematycznych) modeli również w logistyce. Toteż w środowisku badaczy naukowych rośnie zrozumienie potrzeby i nieuchronność matematyzacji działania systemów logistycznych.

W procesie zarządzania badanym obiektem z reguły wykorzystywane są odpowiednie prognozy w celu podejmowania racjonalnych decyzji. Stwierdza się wtedy, że prognozy te wspomagają proces efektywnego zarządzania obiektem.

Celem mojej pracy jest zaprezentowanie nowej – nowatorskiej metody budowania prognoz wspomagających proces zarządzania usługami przedsiębiorstw logistycznych na podstawie praw funkcjonowania probabilistycznego systemu logistycznego, czyli modeli analitycznych tych procesów w postaci pewnych układów równań.

Praca składa się z dwóch części.

Część I obejmuje dwa rozdziały, z których pierwszy poświęcony jest przeglądowi wybranych modeli matematycznych występujących w logistyce, drugi zaś przedstawia podstawowe kierunki badań stosowane w prognozowaniu.

Część II prezentuje mój autorski wkład do tej pracy i składa się z ośmiu rozdziałów. Pierwszy z nich opisuje badany przeze mnie system logistyczny. W rozdziałach: 2 i 6 przedstawiłam matematyczną analizę funkcjonowania badanego przeze mnie systemu logistycznego w dwóch rozpatrywanych wariantach. Rozdziały: 3, 4 i 7 zawierają zbudowany, na podstawie tej analizy, probabilistyczny model funkcjonowania badanego systemu w obu wariantach. Model ten umożliwił wyznaczenie prognoz wielkości charakteryzujących działanie tego systemu, które są zaprezentowane w rozdziałach 5 i 8 części II tej pracy.

Analiza działania badanego przeze mnie systemu logistycznego pozwoliła mi uzyskać dwa warianty mojego autorskiego probabilistycznego modelu funkcjonowania tego systemu w postaci układów matematycznych równań (zob. rozdz. 2, 3 i 4 oraz 6 i 7 części II tej pracy).

W oparciu o uzyskany model podałam również moją autorską – nowatorską metodę wyznaczania prognoz (zob. rozdz. 5 i 8 części II). Prognozy te zależą od parametrów badanego systemu logistycznego.

Jeżeli prognozy te okażą się niekorzystne dla działania systemu logistycznego, to istnieje możliwość ich korekty poprzez korektę wartości parametrów działania tego systemu, w celu uzyskania prognoz, które wskażą zarządzającym decydentom na efektywne realizowanie interesów swoich klientów. Takiej możliwości korekty nie dają prognozy uzyskane na podstawie szeregów czasowych.

Jest to moja nowatorska metoda wspomagająca proces zarządzania usługami. Oparta jest ona o analizę działania systemu logistycznego prowadzącą do uzyskania przeze mnie dwóch wariantów autorskiego probabilistycznego modelu działania tego systemu (zob. rozdz. 3, 4 i 7 części II).

Charakterystyki te oraz odpowiednie prognozy, zależne od parametrów działania badanego systemu wraz z możliwością ich wykorzystania do wspomagania procesu

zarządzania oraz do podnoszenia gospodarczej konkurencyjności przedsiębiorstw logistycznych, zaprezentowałam w rozdziałach: 4, 5 i 8 części II pracy.

Ponadto zbudowane przeze mnie ilościowe (matematyczne) narzędzia tworzą dla programistów teoretyczno-metodologiczne podstawy budowania symulacyjnych programów informatycznych wspomagających proces decyzyjny.

Zadając określone wartości parametrów systemu można uzyskiwać konkretne prognozy funkcjonowania systemu logistycznego. W przypadku zaś uzyskania niekorzystnych prognoz model mój pozwala na zmianę wartości parametrów systemu i taki ich dobór, który spowoduje uzyskanie korzystnych prognoz funkcjonowania przedsiębiorstwa logistycznego, a tym samym zapewni wzrost jego gospodarczej i finansowej konkurencyjności. Jest to podejście innowacyjne i dotąd nieznane.

Aktualnie takich modeli w logistyce nie ma. Stąd też wykorzystanie zbudowanego przeze mnie probabilistycznego modelu oraz zaprezentowanej metodyki prognozowania jest niezbędnie potrzebne i w pełni uzasadnione oraz stanowi podstawę wykorzystania symulacji w nowoczesnej logistyce.

CZĘŚĆ I

1. Wybrane ilościowe (matematyczne) modele w logistyce.

Opisując funkcjonowanie systemu logistycznego w języku matematycznym tworzy się jego ilościowy (matematyczny) model w postaci równania lub układu równań matematycznych o powiązaniach ilościowych między zmiennymi wielkościami, które ten system logistyczny charakteryzują.

Metodologia procesu modelowania wyróżnia kilka typów modeli ilościowych (matematycznych). Są to m.in. modele:

- deterministyczne, w których parametry są znane i stałe,
- stochastyczne, w których parametry są zmiennymi losowymi o znanym rozkładzie prawdopodobieństwa,
- operacyjne o krótkim horyzoncie czasu,
- strategiczne o dalekosiężnych następstwach,
- optymalizacji jedno- lub wielokryterialnej,
- liniowe wchodzące w zakres technik obliczeniowych i programowania liniowego.

Z dokładnego przeglądu literatury naukowej dotyczącej metod i modeli ilościowych (matematycznych) wspomagających proces zarządzania usługami na podstawie praw funkcjonowania systemu logistycznego wynika, że metody i modele te mają charakter wycinkowy i zbyt ogólny.

Oto przykłady aktualnego zastosowania metod ilościowych (matematycznych) w logistyce.

W ocenie niezawodności systemu logistycznego ([130]) pierwszoplanowe znaczenie ma zwykle czynnik czasu. Z tego względu, jako miarę niezawodności $R(t)$, przyjmuje się prawdopodobieństwo P zrealizowania określonego zadania w założonym limicie czasu t_0, czyli:

$$R(t) = \mathrm{P}(T < t_0) \tag{1}$$

gdzie:
T – losowy czas realizacji określonego zadania (np. dostawy),
t_0 – założony (zdeterminowany) limit czasu na wykonanie zadania.

Jeśli ponadto uwzględnić postulat, że określone zadanie powinno być zrealizowane „*na czas*", czyli z określoną tolerancją czasową Δt (nie za wcześnie, a także bez nie akceptowalnych opóźnień), to wówczas niezawodność systemu logistycznego można określić jako prawdopodobieństwo:

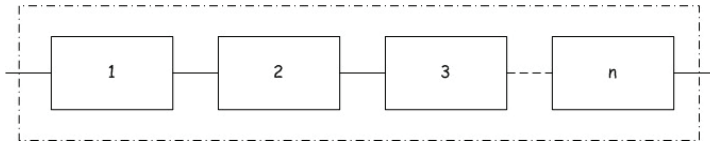
$$R(t) = \mathrm{P}\left(t_0 - \frac{\Delta t}{2} \le T < t_0 + \frac{\Delta t}{2} \right) \tag{2}$$

gdzie:
Δt – dopuszczalny przedział czasu na realizację określonego zadania logistycznego.

Niezawodność techniczna systemu logistycznego - zdefiniowana jako prawdopodobieństwo bezawaryjnego działania podsystemu przepływu materiałów - zależy nie tylko od niezawodności poszczególnych jego składników, ale również od układu i wzajemnych relacji między elementami tworzącymi strukturę tego podsystemu.

W tym kontekście analizuje się systemy o strukturach: szeregowej, równoległej, szeregowo – równoległej, równoległo – szeregowej oraz progowej. Niezawodność takich systemów rozpatrzono poniżej.

Podsystem o strukturze szeregowej przedstawiony jest na rys. 1.



Rys. 1. Podsystem logistyczny o szeregowej strukturze funkcjonalnej (źródło: [130]).

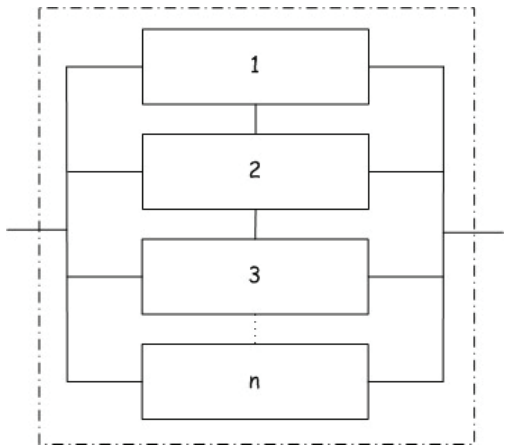
Niezawodność R_{sz} podsystemu o strukturze szeregowej (rys. 1) zawierającego n – elementów wyraża się iloczynem niezawodności poszczególnych elementów – zgodnie z tym:

$$R_s = R_1 \cdot R_2 \cdot \ldots \cdot R_n \tag{3}$$

Z wyrażenia (3) wynika, że w podsystemie logistycznym o strukturze szeregowej:

- niezawodność jest tym większa, im mniej jest elementów składowych,
- niezawodność nie może być większa od niezawodności elementu najbardziej zawodnego (efekt najsłabszego ogniwa),
- w przypadku dużej liczby elementów składowych nawet duża niezawodność pojedynczego elementu niewiele wpływa na niezawodność całego podsystemu,
- niezdatność chociaż jednego elementu powoduje niezdatność całego podsystemu.

Podsystem o strukturze równoległej przedstawiony jest na rys. 2.



Rys. 2. Podsystem logistyczny o równoległej strukturze funkcjonalnej (źródło: [130]).

Charakterystyczną cechą podsystemu o strukturze równoległej (rys. 2) jest fakt, że funkcjonuje on poprawnie, jeśli co najmniej jeden z jego elementów składowych jest w stanie zdatności.

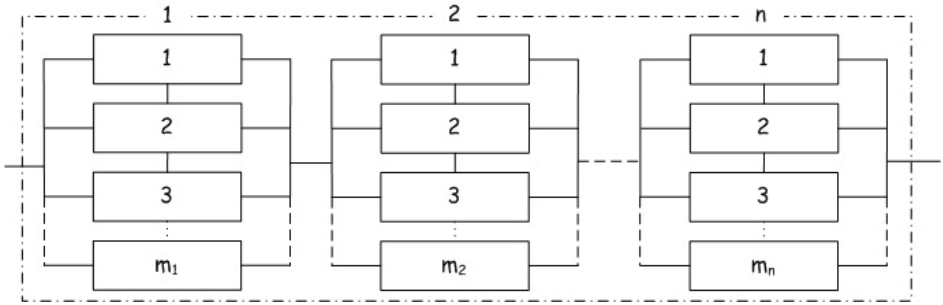
Zawodność (prawdopodobieństwo uszkodzenia) F_{fail} podsystemu o strukturze równoległej, zawierającej n – elementów, wyraża się iloczynem zawodności poszczególnych elementów składowych $F_{fail(i)}$.

Zgodnie z tym, niezawodność (prawdopodobieństwo poprawnej pracy) takiego podsystemu jest równa:

$$R_r = 1 - (1 - R_1) \cdot (1 - R_2) \cdot \ldots \cdot (1 - R_n) \tag{4}$$

Ze wzoru (4) wynika, że niezawodność podsystemu o strukturze równoległej jest tym większa, im więcej elementów zawiera ta struktura. Z tego względu – w celu zwiększenia niezawodności systemów o strukturze równoległej – wprowadza się często pewną liczbę tzw. elementów nadmiarowych (rezerwowych).

Podsystem o strukturze szeregowo - równoległej przedstawiony jest na rys. 3.



Rys. 3. Podsystem o szeregowo - równoległej strukturze funkcjonalnej (źródło: [130]).

Podsystem o strukturze szeregowo – równoległej (rys. 3) stanowi szeregowe połączenie *n*- zespołów, z których każdy zawiera m_i- elementów połączonych równolegle.

Podsystem o strukturze szeregowo - równoległej jest w stanie zdatności wówczas, gdy każdy z jego *n*- zespołów, funkcjonuje poprawnie (jest zdatny).

Niezawodność podsystemu o szeregowo - równoległej strukturze funkcjonalnej (rys. 3), zawierającej *n* – zespołów, z których każdy posiada m_i- równolegle połączonych elementów, jest równa:

$$R_{sr} = \prod_{j=1}^{n}\left[1 - \prod_{i=1}^{m}(1 - R_{ij})\right] \tag{5}$$

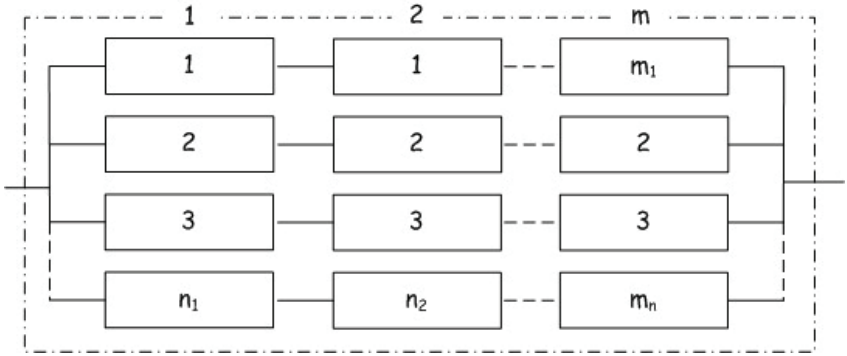
przy czym:

R_{ij} – niezawodność i - tego elementu zainstalowanego w j - tym zespole.

W przypadku szczególnym, gdy podsystem o strukturze szeregowo - równoległej jest jednorodny i regularny – czyli posiada jednakową liczbę takich samych elementów składowych w poszczególnych zespołach – to niezawodność R_{sr} jest równa:

$$R_{sr} = [1 - (1 - R^{m})]^{n} \tag{6}$$

Podsystem o strukturze równoległo – szeregowej przestawiony jest na rys. 4.



Rys. 4. Podsystem o równoległo – szeregowej strukturze funkcjonalnej (źródło: [130]).

Podsystem o równoległo - szeregowej strukturze funkcjonalnej (rys. 4) stanowi równoległe połączenie n - zespołów, z których każdy zawiera m_i - elementów połączonych szeregowo.

Podsystem o strukturze równoległo – szeregowej jest w stanie zdatności (funkcjonuje poprawnie) wówczas, gdy przynajmniej jeden spośród jego n - zespołów jest zdatny, a jego niezawodność R_{sr} jest równa:

$$R_{rs} = 1 - \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \prod_{i=1}^{m} (1 - R_{ij}) \right) \tag{7}$$

przy czym:

R_{ij} - niezawodność i - tego elementu zainstalowanego w j - tym zespole.

W szczególnym przypadku, gdy podsystem jest jednorodny i regularny – czyli posiada jednakową liczbę takich samych elementów składowych w poszczególnych zespołach – to niezawodność R_{sr} jest równa:

$$R_{rs} = 1 - (1 - R^{m})^{n} \tag{8}$$

Szczególnym przypadkiem podsystemów logistycznych przepływu materiałów są podsystemy o tzw. strukturze progowej. Podsystemy progowe (zwane podsystemami typu „k z n") są w stanie zdatności, jeśli k spośród n elementów składowych (przy czym $1 \leq k \leq n$) jest zdatnych (funkcjonuje prawidłowo).

W podsystemach progowych typu „ k z n" dopuszcza się zatem uszkodzenie pewnej ustalonej z góry liczby elementów (n-k), poniżej której obiekt jest uznawany za zdatny. Dla każdego obiektu progowego typu „ k z n" definiuje się parametr p - tzw. próg obiektu:

$$0 \leq p = \frac{k}{n} \leq 1 \tag{9}$$

Na tej podstawie podsystemy (obiekty) progowe typu „ k z n" klasyfikuje się jako:

- obiekty mniejszościowe, dla których $p = k/n < 0{,}5$;
- obiekty równościowe, dla których $p = k/n = 0{,}5$;
- obiekty większościowe, dla których $0{,}5 < p = k/n < 1{,}0$.

Proste podsystemy o strukturze szeregowej lub strukturze równoległej są szczególnymi przypadkami obiektów progowych, a mianowicie:

- podsystem szeregowy (rys. 1) jest obiektem progowym typu „n z n",
- podsystem równoległy (rys. 2) jest obiektem progowym typu „1 z n".

Ocena niezawodności działania systemów logistycznych z uwzględnieniem prawdopodobieństw spełnienia poszczególnych zadań cząstkowych, określonych klasyczną regułą „*7R*", definiuje się następująco ([130]):

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{P}_{cpr} = \frac{N_{cpr}}{N};\ \mathrm{P}_{cpl} = \frac{N_{cpl}}{N};\ \mathrm{P}_{ccu} = \frac{N_{ccu}}{N};\ \mathrm{P}_{cti} = \frac{N_{cti}}{N};\\ \mathrm{P}_{cql} = \frac{N_{cql}}{N};\ \mathrm{P}_{cqt} = \frac{N_{cqt}}{N};\ \mathrm{P}_{cdo} = \frac{N_{cdo}}{N};\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

gdzie:

- $\mathrm{P_i}$ – prawdopodobieństwo zapewnienia i-tej cechy działania systemu logistycznego,
- N – liczba wszystkich zrealizowanych zadań (dostaw),
- N_{cpr} – liczba prawidłowych produktów,
- N_{cpl} – liczba produktów dostarczonych do właściwego miejsca,
- N_{ccu} – liczba produktów dostarczonych do właściwego odbiorcy (klienta),
- N_{cti} – liczba produktów dostarczonych we właściwym przedziale czasowym,
- N_{cql} – liczba dostarczonych produktów o właściwej jakości,
- N_{cqt} – liczba produktów dostarczonych we właściwej ilości,
- N_{cqt} – liczba produktów dostarczonych po właściwej cenie.

Jeśli poszczególne cechy systemu logistycznego (zdefiniowane regułą „*7R*") są statystycznie niezależnymi zmiennymi losowych i znaczenie tych cech dla odbiorcy jest takie samo (jednakowe wagi), to dla tak zdefiniowanego systemu można określić tzw. wskaźnik „perfekcyjnej realizacji zamówienia" ([125]):

$$\mathrm{R_d} = \mathrm{P}_{cpr} \cdot \mathrm{P}_{cpl} \cdot \mathrm{P}_{ccu} \cdot \mathrm{P}_{cti} \cdot \mathrm{P}_{cql} \cdot \mathrm{P}_{cqt} \cdot \mathrm{P}_{cdo} \tag{11}$$

Jeśli jednak poszczególne cechy (wymagania) systemu logistycznego mają różne znaczenie dla odbiorcy, to fakt ten należy uwzględnić – wprowadzając wektor wag cząstkowych:

$$\mathbf{w} = [\mathrm{w}_{cpr}, \mathrm{w}_{cpl}, \mathrm{w}_{ccu}, \mathrm{w}_{cti}, \mathrm{w}_{cql}, \mathrm{w}_{cqt}, \mathrm{w}_{cdo}] \tag{12}$$

przy czym składowe tego wektora zawierają się w przedziale <0,1> i ponadto spełniają warunek:

$$\mathrm{w}_{cpr} + \mathrm{w}_{cpl} + \mathrm{w}_{ccu} + \mathrm{w}_{cti} + \mathrm{w}_{cql} + \mathrm{w}_{cqt} + \mathrm{w}_{cdo} = 1 \tag{13}$$

Zgodnie z tym, dla systemu logistycznego, którego cechy mają różne znaczenie dla odbiorcy końcowego, wskaźnik „perfekcyjnej realizacji zamówienia" wyraża się następująco:

$$\mathrm{R_d} = \mathrm{P}_{cpr} \cdot w_{cpr} + \mathrm{P}_{cpl} \cdot w_{cpl} + \mathrm{P}_{ccu} \cdot w_{ccu} + \mathrm{P}_{cti} \cdot w_{cti} + \mathrm{P}_{cql} \cdot w_{cql} + \mathrm{P}_{cqt} \cdot w_{cqt} + \mathrm{P}_{cdo} \cdot w_{cdo} \tag{14}$$

W ocenie niezawodności systemów logistycznych stosowany jest tzw. wskaźnik *OTIF* (*On-time, In-full, Error-free*), zdefiniowany następująco ([130]):

$$\mathrm{OTIF} = P_{o-t} P_{i-f} P_{e-f} \tag{15}$$

gdzie:

- $\mathrm{P_{o\text{-}t}}$ – prawdopodobieństwo zrealizowania zamówienia na czas,
- $\mathrm{P_{i\text{-}f}}$ – prawdopodobieństwo zrealizowania kompletnego zamówienia,
- $\mathrm{P_{e\text{-}f}}$ – prawdopodobieństwo zrealizowania zamówienia bez wad.

W myśl wskaźnika *OTIF* (15), perfekcyjnie zrealizowane zamówienie jest wtedy, gdy:

- towar został dostarczony bez żadnego opóźnienia,

- dostarczono wszystkie elementy zamówienia,
- żaden element dostawy nie został w procesie logistycznym uszkodzony.

Przykładem takiego ujęcia zagadnienia jest niezawodność podsystemu transportu wewnętrznego w logistycznym systemie magazynowym, która jest oceniana w kategoriach dwustanowych, tj. stanu zdatności oraz stanu niezdatności.

Kolejnym zagadnieniem, w którym można doszukać się ilościowego (matematycznego) modelu, jest metoda ekonomicznej wielkości zamówienia (Economic Order Quantity – EOQ).

Polega ona na poszukiwaniu kompromisu między kosztami utrzymywania zasobu towarów i kosztami składania zamówień. Podstawowe założenia prostego modelu EOQ uzupełniania towarów są następujące[1] ([42]):

- ciągła, stała i znana wielkość popytu,
- stały i znany cykl uzupełnienia zasobu towarów (czas dostawy),
- pełne zaspokojenie popytu,
- stałe koszty zakupu i transportu, niezależne od wielkości zamówienia i czasu,
- brak towarów w drodze,
- towar jest jednorodny (jeden asortyment)
- nieskończony horyzont planistyczny,
- nieograniczona wielkość dostępnych środków finansowych (kapitału).

Ekonomiczną wielkość zamówienia wyznacza punkt, w którym łączne koszty składania zamówień i utrzymania towarów są najniższe. Wartość liczbową ekonomicznie uzasadnionej wielkości zamówienia oblicza się ze wzoru ([38]):

$$Q = \sqrt{\frac{2RA}{VW}} \tag{16}$$

gdzie:

R – popyt roczny na dany asortyment,
A – koszt zamawiania jednostki asortymentu towarowego,
V – wartość jednostki zapasu,
W – procentowy udział kosztów zasobu towarów danego asortymentu w ogólnych kosztach

Ekonomiczna wielkość zamówienia, obliczona na podstawie wzoru (16), może wymagać skorygowania z powodów np. zmian kosztów transportu lub upustów cenowych. Na ogół jednostkowe ceny transportu zależą od masy lub wielkości (gabarytów) przewożonego ładunku. Przy transporcie małych ładunków cena przewozu jednostki masy (np. 1 tony) jest na ogół wyższa, niż w przypadku dużych ładunków. Ponadto, przy większych zamówieniach dostawcy stosują zwykle większe upusty cenowe. Wpływa to na zmianę założeń wyjściowych prostego modelu EOQ i powinno być uwzględniane przy obliczaniu ekonomicznej wielkości zamówienia wg wzoru (16).

Modele ilościowe (matematyczne), w postaci jedynie konkretnych wzorów, są obecne przy badaniu wydajności systemów logistycznych.

Wśród czynników charakteryzujących podsystemy przepływu materiałów pod względem technicznym szczególne znaczenie mają następujące.

[1] Coyle J. J., Bardi E. J., Langley C. J. Jr.: Zarządzanie logistyczne. PWE, Warszawa 2010, s. 49.

- Wydajność teoretyczna komponentów podsystemu transportowego Q (tzw. przepustowość), wynikająca z wartości parametrów technicznych poszczególnych środków technicznych tworzących strukturę podsystemu. Miernikiem przepustowości jest maksymalna liczba/masa ładunków w jednostce czasu, które mogą teoretycznie przepływać poprzez poszczególne elementy podsystemu.

  Przepustowość Q komponentów o działaniu ciągłym zależy od maksymalnej dopuszczalnej prędkości v przemieszczania ładunków oraz minimalnej dopuszczalnej odległości a pomiędzy ładunkami – zgodnie ze wzorem:

$$Q = 3600\frac{v}{a} \tag{17}$$

  Przepustowość Q komponentów o działaniu cyklicznym zależy natomiast od prędkości jazdy v, odległości transportowej L oraz liczby M zastosowanych środków technicznych – zgodnie ze wzorem:

$$Q = 3600\frac{M}{t_0 + \frac{2L}{v}} \tag{18}$$

  gdzie: $t_{0,}$ to łączny czas operacji załadunku/rozładunku, przyspieszania i hamowania środka transportu.
- Wydajność rzeczywista podsystemu Q_{rz} charakteryzująca jego zdolność do przekazywania strumieni ładunków – bez zakłóceń - poprzez wszystkie komponenty tworzące strukturę podsystemu transportowego. Wydajność rzeczywista uwzględnia m.in. możliwość powstawania spiętrzeń i tworzenia się kolejek w podsystemie przepływu materiałów. Innymi słowy, wydajność rzeczywista wyraża maksymalne natężenie strumieni materiałów, przy którym czas spiętrzania ładunków oraz długość powstających kolejek nie przekraczają wartości dopuszczalnych.

Warunkiem koniecznym niezakłóconego przepływu ładunków przez element składowy podsystemu transportowego jest, aby chwilowe natężenie strumienia materiałów (ładunków) λ_i nie było większe od wydajności teoretycznej (przepustowości) Q_i tego elementu, czyli – aby tzw. współczynnik wykorzystania potencjału transportowego ρ_i był nie większy od jedności:

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{Q_i} \le 1 \tag{19}$$

Postulat (19) jest warunkiem wystarczającym dla sprawnego działania podsystemu transportowego jedynie w prostych przypadkach deterministycznych, tj. takich, kiedy zgłoszenia (ładunki) nadchodzą w stałych odstępach czasowych oraz czas ich obsługi (przyjmowania do systemu) jest stały i krótszy niż czas zgłaszania się kolejnych ładunków.

W rzeczywistych systemach logistycznych przepływy materiałów odbywają się jednak na ogół w sposób losowy, tzn.:

- ładunki nadchodzą w nieregularnych odstępach czasowych,
- długotrwałość obsługi poszczególnych ładunków jest zróżnicowana w zależności np. od rodzaju i wielkości ładunków.

W tych warunkach analiza działania podsystemu transportowego wymaga uwzględnienia losowych aspektów procesu przepływu materiałów – zwłaszcza:

- rozkładu prawdopodobieństwa nadchodzenia zgłoszeń (ładunków) do systemu,
- rozkładu prawdopodobieństwa czasów obsługi zgłoszeń (ładunków) w systemie.

Dla prostych, jednokanałowych systemów obsługowych – działających w warunkach losowych - można przyjąć, że:

- zgłoszenia podlegają rozkładowi Poissona o stałym parametrze λ,

oraz

- czas obsługi zgłoszeń ma rozkład wykładniczy o stałym parametrze μ.

Z teorii obsługi masowej wynikają następujące zależności na:

- funkcję gęstości prawdopodobieństwa powstania kolejki n zgłoszeń oczekujących na obsługę, czyli:

$$f_{\mathrm{N}} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) \tag{20}$$

- dystrybuantę powstania kolejki n zgłoszeń oczekujących na obsługę, czyli prawdopodobieństwo:

$$F_{\mathrm{N}} = P(N \le n) = 1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{1+N} \tag{21}$$

- wartość oczekiwaną długości kolejki, czyli:

$$H = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho^2}{1-\rho} \tag{22}$$

- funkcję gęstości czasu oczekiwania w kolejce n zgłoszeń, czyli prawdopodobieństwo:

$$f_T(t) = \lambda\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)e^{-(\mu-\lambda)t} \tag{23}$$

- dystrybuantę czasu oczekiwania w kolejce n zgłoszeń, czyli prawdopodobieństwo:

$$F_T(t) = P(T \le t) = 1-\frac{\lambda}{\mu}e^{-(\mu-\lambda)t} \tag{24}$$

- wartość oczekiwaną czasu oczekiwania w kolejce, czyli:

$$\bar{t} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho}{1-\rho} \tag{25}$$

gdzie: $\rho = \lambda/\mu$ to wskaźnik wykorzystania systemu.

Inne jeszcze modele ilościowe (matematyczne) ograniczają się wyłącznie do konkretnych wzorów np. na:

- wskaźniki oceny infrastruktury transportowej,
- koszty przepływu potoku ładunków[2],

czy na

- koszty magazynowania i transportu

oraz na

- warunki ich minimalizacji.

[2] Jacyna M. (red.): System logistyczny Polski. Uwarunkowania techniczno-technologiczne komodalności transportu, Oficyna Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2012, s. 277-281.

Pewnymi matematycznymi wzorami są też określone zależności np. pozwalające na:

- obliczanie tzw. rejonów ciążenia obszarów obsługi punktu modalnego sieci logistycznej,
- wyznaczanie spodziewanego popytu w danym miejscu (model HUFFA) wzajemnego przestrzennego oddziaływania,

lub na

- koordynowanie transportu w mieście (model grawitacyjny).[3]

Ilościowe (matematyczne) modele są również obecne w zagadnieniach optymalizacyjnych dotyczących np. obliczania optymalnej partii produkcji, czy zakupu, ewentualnie optymalizacji powiązań transportowych[4] oraz optymalnej lokalizacji obiektów w sieci logistycznej.[5]

Ślady ilościowych (matematycznych) modeli w postaci wzorów można też znaleźć w analizie procesów zakupowych zarówno w sferze funkcjonalnej, jak i decyzyjnej w odniesieniu do wielkości dynamiki i struktury zakupu oraz wpływu cen na koszty działalności systemu logistycznego.[6]

Istotą procesów funkcjonowania systemów logistycznych jest sterowanie strumieniami materialnymi w czasie. W tym zakresie aktualnie stosowanymi metodami prognozowania są metody analizy szeregów czasowych, zwane metodami tendencji rozwojowej, – w szczególności modele adaptacyjne prognozowania krótkoterminowego. W prognozowaniu takim wykorzystywane są ekonometryczne modele przyczynowo-skutkowe, które służą do planowania procesów logistycznych w skali strategicznej.

Modele te ograniczają się do równań regresji jednej lub wielu zmiennych, np.:

- jednoparametrowy model Browna adekwatny do szeregów czasowych stacjonarnych można zapisać następująco:

$$\overline{y}_t = xy_t + (1-\alpha)\overline{y}_{t-1} \tag{26}$$

przy czym prognoza na okres $t+T$ ma postać: $\hat{y}_{t+T} = \overline{y}_t$

gdzie:

$\overline{y}_t$, $\overline{y}_{t-1}$ - średnie po okresach odpowiednio t i $t-1$,

y_t - ostatnia realizacja zmiennej prognozowanej,

α - parametr wyrównania wykładniczego przyjmujący wartości z przedziału $(0;1)$,

$\hat{y}_{t+T}$ - prognoza zmiennej y w okresie $t+T$,

- adaptacyjny model dwuparametrowy C.C. Holta właściwy do zastosowania w przypadku stwierdzenia istotnych zmian w tendencji rozwojowej prognozowanej zmiennej i składający się z trzech równań:

[3] Gołembska E.: Logistyka w gospodarce światowej, Wydawnictwo C.H.Beck, Warszawa 2009, s. 144-146.
[4] Skowronek Cz., Sariusz-Wolski Z.: Logistyka w przedsiębiorstwie, PWE, Warszawa 2008, s. 150-169.
[5] Jacyna M. (red.): System logistyczny Polski. Uwarunkowania techniczno-technologiczne komodalności transportu, Oficyna Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2012, s. 335-338.
[6] Skowronek Cz., Sariusz-Wolski Z.: Logistyka w przedsiębiorstwie, PWE, Warszawa 2008, s. 312-315.

wyrównanie danych:

$$a_t = \alpha y_t + (1-\alpha)(a_{t-1} + b_{t-1})$$

wyrównanie trendu:

$$b_t = \beta(a_t - a_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1} \qquad (27)$$

prognoza na okres:

$$t+T:\ \hat{y}_{t+T} = a_t + b_t T$$

gdzie:

a_t - średni popyt do okresu t włącznie,

b_t - różnica między średnimi stanowiąca ocenę przyrostu trendu,

α, β - parametry wyrównania z przedziału. $(0;1)$.

Istnieją też inne modele oparte na wykładniczym wyrównywaniu danych, np. model P.R. Wintera uwzględniający również wahania sezonowe, czy model nieskrępowanego wyrównania wykładniczo-autoregresyjnego Z. Pawłowskiego.[7]

Zależności występujące między poszczególnymi elementami systemu logistycznego są zazwyczaj bardzo złożone i wielokierunkowe. Nadmienione wyżej modele ekonometryczne ((26) i (27)) uwzględniają tylko istotne elementy i pomijają mniej istotne – są więc zbyt ogólne.

Również wymienione wcześniej modele (1)-(25) mają charakter jedynie wycinkowy. Podobną cechę mają modele stosowane w systemach logistycznych wykorzystujące elementy teorii kolejek. Przykładem takich prac są np. publikacje M. Sokólskiego, T. Nowakowskiego, P.R. Murphyego i D.F. Wooda (zob. [130], [137], [149]).

Niezbędne dla nowoczesnego funkcjonowania i zarządzania systemami logistycznymi jest stosowanie w logistyce współczesnych technik informatycznych. Przykładowo w systemach logistycznych używane są m.in. następujące programy komputerowe:

- WFMAG – do prowadzenia gospodarki magazynowej, zaopatrzenia i sprzedaży,
- PŁATNIK – obsługa rozliczenia z ZUS i Urzędem Skarbowym,
- SYMFONIA – obejmujący kadry i płace,
- HURT – obejmujący obrót towarowy,
- JK.SHOPER – do obsługi detalicznej,
- INWENTARYZACJA – dla potrzeb prowadzonej inwentaryzacji,
- PRZELEWY – umożliwiający przekazywanie środków pieniężnych do banku.[8]

Firmy logistyczne i usługowe stosują technologie informatyczne przede wszystkim w celu podniesienia efektywności i zautomatyzowania swojej pracy w celu spełnienia oczekiwań dotychczasowych i potencjalnych klientów centrów usługowych. Analiza rynku usług logistycznych na podstawie rozwiązań informatycznych jest podstawowym kryterium przy wyborze dostawcy usług logistycznych.[9]

We współczesnych technologiach logistycznych chodzi o efekt zarówno przemysłowy, jak i usługowy.[10] W każdym z tych przypadków chodzi o zapewnienie niezawodności działania systemu logistycznego.

---

[7] Tamże, s. 217-232.
[8] Kupiec L.: Podstawy logistyki, Wyd. USFiZ, Białystok 2010, s. 252.
[9] Ciesielski M.: Rynek usług logistycznych, Difin, Warszawa 2005, s. 27.
[10] Długosz J. (red.): Nowoczesne technologie w logistyce, PWE, Warszawa 2009, s. 66.

Po wnikliwej analizie ilościowych (matematycznych) modeli stosowanych aktualnie w logistyce stwierdzam, iż brak jest:

- modeli umożliwiających zbudowanie różnych ilościowych charakterystyk,

w tym

- prognoz zależnych od parametrów działania badanego systemu logistycznego i wspomagających proces efektywnego zarządzania usługami oraz powodujących poprawę finansowej i gospodarczej konkurencyjności przedsiębiorstw logistycznych.

Zatem, zaprezentowana w części II mojej pracy, metodyka wspomagania zarządzania usługami na podstawie zbudowanych, w kolejnych rozdziałach części II, takich ilościowych charakterystyk jest narzędziem nowym i niezbędnie potrzebnym w logistyce w celu podniesienie gospodarczej i finansowej konkurencyjności przedsiębiorstw logistycznych.

2. Podstawowe kierunki badań w teorii i praktyce prognozowania.

W teorii i praktyce prognozowania można wyróżnić dwa kierunki badań:

- jeden z nich dotyczy konstruowania prognoz określonych procesów na podstawie realizacji szeregów czasowych tych procesów (zob. np. [35]-[38], [71]-[91], [115], [122], [124], [125], [160]-[162], [166], [167]),
- drugi zaś – budowania prognoz na podstawie praw funkcjonowania badanych obiektów.

Liczba publikacji ukazujących się w pierwszym obszarze działalności naukowej jest znacznie większa od ilości prac powstających w ramach drugiego kierunku badań (zob. np. [26], [34], [51]-[53], [99], [100], [119], [120]).

Prognozy stanów procesów opisujących badane obiekty prognostyczne wyznacza się więc w drugim z wymienionych obszarów badań za pomocą modeli matematycznych tych obiektów – modeli znanych lub dopiero konstruowanych.

Niniejsza praca należy w zasadzie do drugiego z wymienionych obszarów badań, choć wykorzystane są w niej również prognozy uzyskane na podstawie odpowiednich szeregów czasowych. Problematyka jej dotyczy głównie zagadnień zwiększania efektywności funkcjonowania systemów logistycznych, działających w różnych obszarach gospodarki, z wykorzystaniem podejścia modelowego i prognozowania (zob. np.[4], [31], [32], [48], [90]-[92], [106]-[112], [142], [145]-[147], [152]).

Stosowanie ilościowych metod wspomagających analizę i realizację procesu efektywnego funkcjonowania takich systemów ma istotne znaczenie, ponieważ prowadzi do wzrostu ich konkurencyjności gospodarczej i finansowej.

Praca niniejsza prezentuje budowanie i uzyskanie prognoz procesów na podstawie praw funkcjonowania badanego systemu logistycznego.

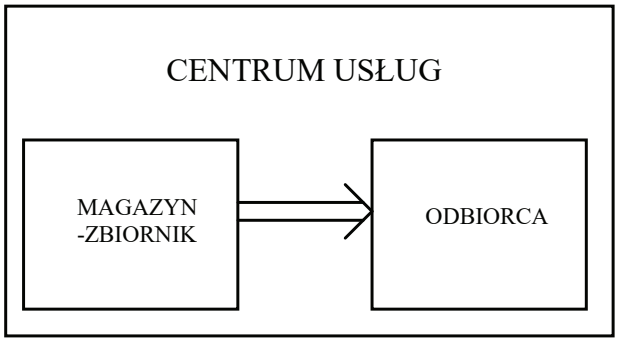
CZĘŚĆ II

1. Opis badanego systemu logistycznego.

Przedmiotem mojej analizy jest działanie systemu logistycznego (SL) wspomagającego efektywne funkcjonowanie centrum usług (CU).

Analizowany w pracy system logistyczny dostarcza do magazynu produkty, które centrum usług sprzedaje swoim klientom – odbiorcom.

Elementami składowymi centrum usług jest magazyn-zbiornik i odbiorca, co przedstawione jest na rysunku 5.

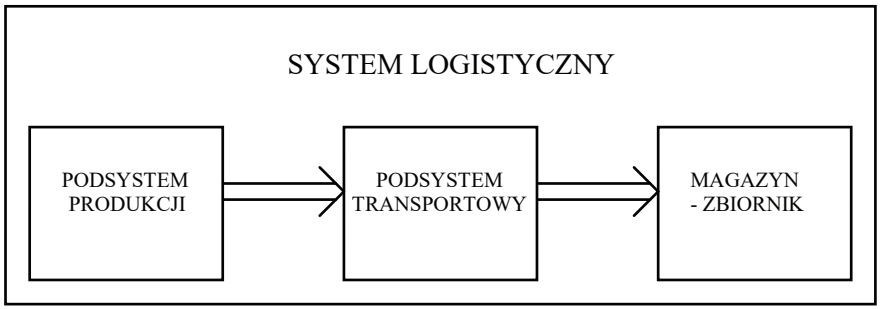


Rys. 5. Centrum usług.

W pracy zostały zbudowane prognozy stanów procesów wspomagających efektywne zarządzanie centrum usługowym (zob. rys. 5), (zob. rozdz. 5 i 8).

Przykładem CU jest magazyn-zbiornik gromadzący np. sypkie pasze, nawozy rolnicze lub środki ochrony roślin, węgiel, piasek, żwir budowlany, gaz czy ropę, a odbiorcą tego produktu jest odpowiednio np. duże gospodarstwo rolnicze, elektrownia, kombinat budowlany, elektrociepłownia, a nawet region kraju.

Prognozy stanów tych procesów uzyskane zostały na podstawie analizy praw działania systemu logistycznego wspomagającego centrum usług. System ten składa się z podsystemu produkcji i podsystemu transportowego oraz z magazynu-zbiornika, jak pokazuje rysunek 6.

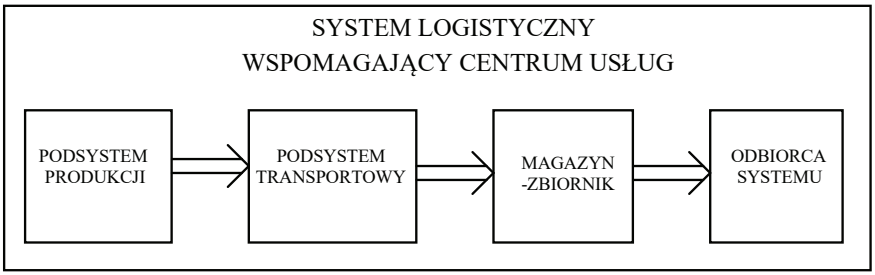


Rys. 6. System logistyczny wspomagający centrum usług.

Przykładem SL jest:

- podsystem produkcji np. zakłady produkujące sypkie pasze, nawozy rolnicze i środki ochron roślin, kopalnia węgla, kopalnia piasku lub żwiru, czy rafineria,
- podsystem transportowy tworzą np. taśmociągi, transportery, czy rurociągi przekazujące, wytworzony lub pozyskany przez podsystem produkcji produkt, do magazynu-zbiornika.

System logistyczny (zob. rys. 6) zapewnia efektywne funkcjonowanie centrum usług, co schematycznie ilustruje rysunek 7.

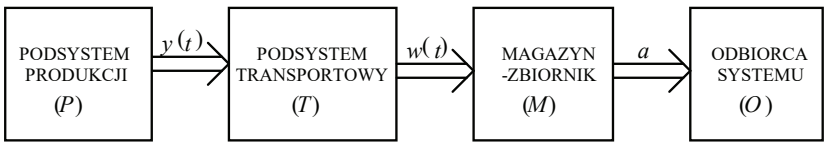


Rys. 7. Schemat funkcjonowania badanego systemu logistycznego wspomagającego centrum usług przedsiębiorstw logistycznych.

Systemem logistycznym dla centrum usługowego może być np. system dostarczania sypkich pasz, nawozów rolniczych lub środków ochrony roślin do dużego gospodarstwa rolniczego, węgla dla elektrowni, czy paliwa dla elektrociepłowni, ewentualnie materiałów sypkich, takich jak żwir, piasek lub cement itp. dla pewnego odbiorcy, jakim może być centrum usług budowlanych.

Otrzymane w pracy prognozy zbudowane zostały na podstawie modeli matematycznych. Stanowią one probabilistyczne charakterystyki stanów procesów zachodzących w systemie logistycznym wspomagającym efektywne zarządzanie centrum usługowym (zob. rys. 7).

Część II pracy w rozdziałach 2-8 zawiera analizę funkcjonowania badanego systemu logistycznego. Oto szczegółowy schemat działania tego systemu:



Rys. 8. Szczegółowy schemat funkcjonowania systemu logistycznego wspomagającego centrum usług przedsiębiorstw logistycznych.

Do odbiorcy O (np. elektrowni[11]), którego funkcjonowanie uwarunkowane jest stałym zapotrzebowaniem a jednostek produktu (np. węgla[12]), dostarczany jest w sposób ciągły (np. za pomocą taśmociągów, gazociągów, linii przesyłowych) strumień produkcji $y(t)$ (gdzie t oznacza czas), realizowany przez podsystem produkcji P, jako nadawcy (zob. rys. 8). Przykładem podsystemu P (nadawcy) może być np. zespół koparek.

[11] elektrociepłowni, dużego gospodarstwa rolnego, czy centrum usług budowlanych
[12] paliwa, sypkich pasz, nawozów rolniczych, środków ochrony roślin, żwiru, piasku, czy cementu

Losowe zmiany procesu $y(t)$ w czasie t oraz nieplanowane przerwy w pracy (awarie) podsystemu transportowego T są czynnikami wpływającymi na zmniejszenie efektywności funkcjonowania takiego systemu. Efektywność tę można zwiększyć – i jednocześnie zmniejszyć możliwość powstawania przerw w dostawie odpowiedniej ilości produktu do odbiorcy O – poprzez zlokalizowanie w otoczeniu odbiorcy O magazynu-zbiornika M o określonej objętości V.

Magazyn-zbiornik ma podstawowe znaczenie dla sprawnego działania CU przedsiębiorstw logistycznych, ponieważ amortyzuje wpływ losowych czynników zakłócających realizację dostaw produktu do odbiorcy – klienta. Umożliwia on zatem bardziej efektywne funkcjonowanie CU oraz zapewnia wysoką konkurencyjność przedsiębiorstw logistycznych.

Strumień produktu $y(t)$ jest gromadzony w podsystemie M:

- gdy poziom wypełnienia magazynu nie przekracza V

oraz

- gdy $y(t) > a$.

Jeżeli chwilowa zawartość elementu M jest równa V oraz $y(t) > a$, to wielkość strumienia $y(t)$ ogranicza się do poziomu a.

Gdy element M jest pusty i $y(t) < a$, powstaje sytuacja niekorzystna dla odbiorcy O. Określenie więc prawdopodobieństwa tego zdarzenia ma ważne znaczenie praktyczne dla prawidłowego funkcjonowania centrum usług przedsiębiorstw logistycznych.

Zdarzenie losowe, kiedy magazyn jest pusty i proces dostawy produktu do magazynu jest mniejszy od zapotrzebowania odbiorcy jest bardzo niekorzystne dla działania CU. Wówczas to CU nie może zrealizować potrzeb swoich odbiorców – klientów, a gospodarcza i finansowa konkurencyjność przedsiębiorstw logistycznych maleje.

Prognoza dużego prawdopodobieństwa tego zdarzenia jest sygnałem ostrzegawczym dla CU, że zarządzanie SL należy koniecznie poprawić poprzez poprawę następujących parametrów: podsystemu produkcji, podsystemu transportowego oraz poziomu wypełnienia magazynu-zbiornika (zob. rys. 8).

Wejście $w(t)$ podsystemu M, opisujące proces dostawy produktu do magazynu M i dalej do odbiorcy O, można badać w dwóch wariantach:

- wariant zagregowany (rozdziały: 2-5):

  $$\text{gdy } w(t) = y(t);$$

  czyli, proces $w(t)$ reprezentuje łącznie podsystem produkcji P oraz podsystem transportowy T,
- wariant strukturalny (rozdziały 6-8):

  $$\text{gdy } w(t) = y(t)v(t);$$

  czyli proces $w(t)$ uwzględnia *explicite* zarówno podsystem P (strumień produktu $y(t)$), jak i podsystem T. Proces $v(t)$ (zdefiniowany w rozdziale 6 wzorem (6.1)) opisuje funkcjonowanie podsystemu transportowego.

W celu zaproponowania narzędzi wspomagających analizę i proces efektywnego funkcjonowania badanego systemu (zob. rys. 8) należy przyjąć, że $y(t)$ oraz $v(t)$ są procesami Markowa o skończonej liczbie stanów.

W praktyce jest to naturalne założenie. Procesy te opisane są przez intensywność przejścia między swoimi stanami oraz intensywnościami pozostania w tych samych stanach.

System przedstawiony na rys. 8, badany z uwzględnieniem wariantu pierwszego lub wariantu drugiego, oznaczam odpowiednio symbolami:

$S(za)$, to wariant zagregowany

$S(st)$, to wariant strukturalny.

Niech funkcja czasu $z(t)$:

$$z(t) = z(t, \omega)$$

oznacza chwilową zawartość magazynu *M* o skończonej objętości *V*, gdzie ω jest parametrem losowym.

Niech funkcja *h* będzie zdefiniowana następująco:

$$h(z) = \begin{cases} 0, & \text{dla } z \le 0 \\ z, & \text{dla } 0 < z < V \\ V, & \text{dla } V = const,\ V > 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Zauważmy, że proces stochastyczny $z(t)$ w przedziale $[\alpha_1, \alpha_2)$ stałości realizacji procesu:

$$w(t) = y(t)$$

spełnia następujący warunek: dla $\alpha_1 \le t_1 < t < \alpha_2$:

$$z(t, \omega) = h\left[z(t_1) + (y(t_1) - a)\ (t - t_1) \right]. \tag{1.2}$$

Proces stochastyczny jest wielkością zależną od czynników losowych (ω) oraz od czasu (t).

Poziom wypełnienia magazynu jest procesem stochastycznym, ponieważ zależy on od działania podsystemu produkcji i podsystemu transportowego, a na ich funkcjonowanie mają również wpływ czynniki losowe i czas.

Fakt, że wypełnienie magazynu $z(t)$ w przedziałach stałości realizacji procesu $y(t)$ spełnia warunek (1.2), wynika z fizycznej natury procesu $z(t)$. Jeżeli w chwili t_1 wypełnienie zbiornika wynosi $z(t_1)$, to istotnie w chwili *t*, gdy $\alpha_1 \le t_1 < t < \alpha_2$, będzie ono wynosić:

$$z(t) = z(t_1) + (y(t_1) - a)(t - t_1),$$

gdy $0 < z(t_1) + (y(t_1) - a)(t - t_1) < V$.

W przypadku maksymalnego wypełnienia magazynu *M* do jego objętości *V*, mamy:

$$z(t) = V \ \text{ i } \ y(t) \ge a,$$

a więc gdy magazyn *M* jest już pełny i podsystem transportowy *T* może dostarczać więcej rezultatów produkcji $y(t)$ podsystemu *P*, niż potrzebuje odbiorca *O*, należy wtedy utrzymać zdolność transportową systemu zmniejszając jedynie sumaryczną wydajność podsystemu *P* do poziomu zapotrzebowania *a* odbiorcy *O*.

Stan pustego magazynu *M*, czyli gdy:

$$z(t) = 0$$

występuje tylko wtedy, gdy poziom dostawy $y(t)$ jest nie większy niż zapotrzebowanie, czyli gdy:

$$y(t) \le a.$$

Takie wyróżnienie stanów:

$$z(t) = V \quad \text{oraz} \quad z(t) = 0$$

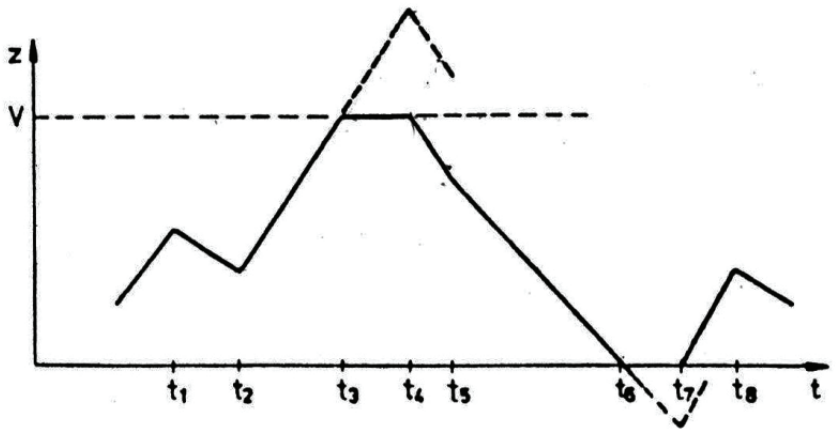
wskazuje na potrzebę wprowadzenia funkcji *h*, określonej wzorem (1.1).

Jedną z możliwych realizacji funkcji:

$$z(t) = z(t, \omega)$$

przedstawiono na rysunku 9.

Symbole $t_1, t_2, \ldots, t_8$ oznaczają momenty zmiany stanów procesu $y(t)$.



Rys. 9. Realizacja procesu $z(t)$.

W chwili $t = t_3$ wypełnienie magazynu *M* jest maksymalne: $z(t) = V$.

Ponadto dla $t \in (t_3, t_4]$ również jest: $z(t) = V$.

Dla $t = t_4$ następuje zmiana stanu procesu $y(t)$, a wypełnienie $z(t)$ maleje do chwili $t = t_6$, kiedy to: $z(t_6) = 0$ oraz dalej: $z(t) = 0$ również dla $t \in (t_6, t_7]$.

W chwili $t = t_7$ proces $y(t)$ zmienia stan, wypełnienie magazynu $z(t)$ natomiast rośnie liniowo w przedziale $[t_7, t_8]$.

Intuicyjnie oczywisty jest fakt, że poziom wypełnienia magazynu $z(t)$ (zob. rys. 9) jest procesem stochastycznym; można również podać formalny dowód tego stwierdzenia.

Ponieważ funkcja $z(t)$ jest określona za pomocą procesu:

$$w(t) = y(t),$$

więc $z(t)$ jest procesem sterownym przez proces dostawy produktu $w(t)$.

Podstawowym elementem działania CU jest magazyn-zbiornik. Od poziomu jego wypełnienia zależy sprawny proces obsługi klientów CU. Z kolei na wielkość wypełnienia magazynu ma wpływ sprawne działanie SL.

Jeżeli SL zapewnia odpowiedni poziom wypełnienia magazynu, to CU sprawnie obsługuje swoich klientów (odbiorców), a tym samym zapewnia wysoką konkurencyjność przedsiębiorstw logistycznych.

Problematyka zwiększania efektywności funkcjonowania scharakteryzowanego wyżej systemu logistycznego, warunkującego sprawne działanie centrum usług w celu poprawy konkurencyjności przedsiębiorstw logistycznych, jest głównym nurtem rozważań niniejszej pracy zawartym w części II – omówionej szczegółowo poniżej.

I tak rozdziały: 2 i 6 dotyczą analizy funkcjonowania badanego systemu logistycznego przedsiębiorstwa odpowiednio w wersji zagregowanej *S(za)* oraz strukturalnej *S(st)*.

W rozdziale 2 zbadany jest system logistyczny (przedstawiony schematycznie na rys. 8), w którym poziom wypełnienia magazynu *M* sterowany jest zagregowanym procesem dostawy produktu (system $S(za)$).

Ponadto przeanalizowane jest jego funkcjonowanie w trzech wariantach:

- stan pośredni (zob. 2.1.),
- bariera dolna (zob. 2.2.)

oraz

- bariera górna (zob. 2.3.)

procesu opisującego poziom wypełnienia podsystemu *M*.

W wyniku tej analizy zostały otrzymane:

- analityczne postacie prawdopodobieństw warunkowych odpowiadających analizowanym wariantom;
- związki, które spełniają funkcje gęstości rozkładów prawdopodobieństwa dwuwymiarowego procesu stochastycznego opisującego funkcjonowanie badanego systemu;
- ilościowe relacje między barierami poziomu wypełnienia magazynu, a intensywnościami procesu sterującego stanem wypełnienia magazynu-zbiornika *M*.

W rozdziale 6 zbadany jest system logistyczny wspomagającym centrum usług, w którym poziom wypełnienia magazynu sterowany jest strukturalnym procesem podaży produktu (system $S(st)$). Funkcjonowanie tego systemu przeanalizowane jest z uwzględnieniem:

- stanu nieekstremalnego poziomu wypełnienia podsystemu *M* (zob. 6.1.)

i

- stanów granicznych (barier): dolnego i górnego (zob. 6.2. i 6.3.).

W rezultacie otrzymane zostały następujące wyniki:

- wzory *explicite* dla prawdopodobieństw warunkowych z uwzględnieniem barier i stanów nieekstremalnych poziomu wypełnienia magazynu *M*;
- relacje, które spełniają funkcje gęstości rozkładów prawdopodobieństwa trójwymiarowego procesu stochastycznego opisującego funkcjonowanie systemu $S(st)$;
- związki między stanami granicznymi poziomu zapasów, a intensywnościami strukturalnego procesu zaopatrzenia podsystemu *M*.

Rozdziały: 3, 4, 5 oraz 7 i 8 dotyczą wniosków, otrzymanych w wyniku analizy funkcjonowania systemu logistycznego w obu wersjach: *S(za)* oraz *S(st)*, z poprzedzających rozdziałów: 2 i 6.

I tak rozdział 3 zawiera:

- probabilistyczny opis badanego systemu z uwzględnieniem różnych wariantów funkcjonowania podsystemu *M*

oraz

- analizę dynamiki parametrów procesu sterującego poziomem wypełnienia podsystemu *M*.

Przedstawione są trzy – ważne w praktyce – prostsze warianty badanego modelu w wersji zagregowanej.

W rozdziale 4 zdefiniowane są: pojęcie oraz charakterystyki „wąskiego gardła" badanego systemu. Przedstawiona jest też metoda ich obliczania.

Zdefiniowany jest:

- wskaźnik oceny strat produkcyjnych odbiorcy O i podsystemu produkcji P,
- wskaźnik oceny stopnia wykorzystania podsystemu M

oraz

- wskaźniki opisujące stany graniczne (bariery) tego podsystemu.

Podana też jest metoda wyznaczania tych wskaźników.

Procedura obliczania wymienionych charakterystyk i wskaźników jest zilustrowana na przykładzie dwustanowego procesu podaży produktu. Zostały uzyskane wzory *explicite* wyrażające zależność tych wielkości od parametrów systemu. Ponadto dokonana jest analiza uwzględniająca przydatność tych wzorów do rozwiązywania problemów efektywnego zarządzania tym systemem oraz do oceny poprawności zaprojektowania systemu.

Rozdział ten zakończony jest przykładem liczbowym, w którym dla określonych parametrów systemu wyznaczone zostały:

- wskaźniki oceny strat produkcyjnych systemu (odbiorcy O i nadawcy P),
- wskaźnik oceny stopnia wykorzystania podsystemu M,
- wskaźniki opisujące stany graniczne (bariery) podsystemu M.

Sprawdzona też została poprawność zaprojektowania systemu.

Rozdział 5 poświęcony jest prognozowaniu wielkości opisujących funkcjonowanie systemu $S(za)$. Oprócz metodyki wyznaczania prognozy charakterystyk działania systemu, zdefiniowanych w poprzednim podrozdziale, podane są także procedury obliczania prognoz innych wielkości opisujących działanie tego systemu.

W celu zilustrowania różnicy podejść metodologicznych [13] do zagadnienia konstruowania prognozy, podany jest przykład wyznaczania prognozy procesu opisującego wielkość wydobycia węgla w kopalni odkrywkowej; gdzie zastosowane zostały elementy analizy harmonicznej.

W rozdziale 7 podany jest probabilistyczny opis badanego systemu gospodarki (system $S(st)$) z uwzględnieniem trzech wariantów działania podsystemu M oraz dynamiki parametrów procesu wejścia tego podsystemu. Przedstawione też są, ważne w zastosowaniach praktycznych, prostsze warianty uzyskanego modelu.

Rozdział 8 zwiera:

- definicje wielkości opisujących funkcjonowanie systemu $S(st)$,
- określa prognozy tych charakterystyk systemu

oraz

- podaje metody ich wyznaczania.

Ponieważ prognozy te zależą *explicite* od parametrów systemu, zatem stwarza to możliwość śledzenia przyszłych zmian w funkcjonowaniu całego systemu logistycznego, które wynikają z przewidywanych zmian parametrów systemu, a w szczególności – ze zmian elementów organizacyjnych.

Otrzymane w pracy:

- probabilistyczne opisy funkcjonowania systemu logistycznego wspomagającego centrum usług przedsiębiorstw logistycznych,
- zdefiniowane charakterystyki działania tego systemu

oraz

- ich prognozy

[13] W rozdziale 2 części I wymienione są dwa kierunki badań prognostycznych

są narzędziami wspomagającymi analizę oraz proces efektywnego funkcjonowania badanego systemu wspomagającego centrum usług, a także wpływającymi istotnie na poprawę gospodarczej i finansowej konkurencyjności przedsiębiorstw logistycznych.

Tego rodzaju narzędzia są elementami podsystemów (teoretyczno-metodologicznych), konstruowanych komputerowych systemów wspomagania decyzji – zarówno finansowych, jak i gospodarczych w celu zapewnienia przedsiębiorstwom wysokiego poziomu konkurencyjności.

Ponieważ ręczne wyznaczanie prognoz na podstawie zaproponowanej przeze mnie prekursorskiej metodyki przedstawionej w rozdziałach 5 i 8 wymaga przeprowadzenia żmudnych rachunkowo obliczeń i różnych założeń przy wielu poziomach dostawy produktu do magazynu, to w celu obliczenia tych prognoz można stosować techniki informatyczne bazujące na odpowiednich metodach numerycznych.

W celu opisu działania badanego systemu można wykorzystać również znane pojęcie momentów zmiennych losowych (wartość oczekiwana, wariancja, kowariancja (współczynnik korelacji)) oraz różne warianty nierówności Czebyszewa. Nierówności te jednak nie pozwalają dokładnie obliczyć prognozy charakterystyk (procesów), które wspomagają proces zarządzania CU.

Jest to prostsze podejście badawcze, ale jego efekty zarówno teoretyczne, jak i praktyczne, są na ogół mniejsze od efektów uzyskanych na podstawie dynamicznego modelowania probabilistycznego, do którego należy zaliczyć wyniki przedstawione w niniejszej pracy.

2. Analiza funkcjonowania systemu logistycznego w przypadku zagregowanego procesu dostawy produktu.

Funkcjonowanie systemu logistycznego, w rozważanym wariancie, można scharakteryzować następującym dwuwymiarowym procesem stochastycznym:

$$(y(t), z(t)).$$

Niech proces:

$y(t)$ będzie jednorodnym, ciągłym i ośrodkowym procesem Markowa o skończonej liczbie stanów y_1, y_2, …, y_n będących nieujemnymi, różnymi liczbami rzeczywistymi, zaś

π_{ij} oznacza intensywność przejścia procesu $y(t)$ od stanu y_i do stanu y_j.

Natomiast proces $z(t)$, sterowany przez proces $y(t)$, określony jest wzorem (1.1).

Analiza funkcjonowania systemu przedstawiona będzie w trzech wariantach:

- częściowe wypełnienie magazynu, czyli dla:

  $$0 < z(t) < V,$$

  stan ten nazywam stanem pośrednim procesu $z(t)$ lub podsystemu *M*,
- bariera dolna, czyli dla:

  $$z(t) = 0,$$

  stan ten nazywam stanem granicznym dolnym procesu $z(t)$ lub podsystemu *M*,
- bariera górna, czyli dla:

  $$z(t) = V,$$

  stan ten nazywam stanem granicznym górnym procesu $z(t)$ lub podsystemu *M*.

Przypadki te należy rozpatrywać oddzielnie, ponieważ odpowiadają im różne, indywidualne warunki pracy systemu.

W celu rozwiązania wielu problemów związanych z poprawą efektywności funkcjonowania systemu (zob. rys. 7), łącznie z uzyskaniem odpowiednich prognoz, wystarczy wyznaczyć prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:

$$P\left(0 < z(t) < \alpha, \quad x(t) = x_k\right) = \int_0^{\alpha} f_k(z,t)\,\mathrm{d}z, \tag{2.1}$$

$$P\left(z(t) = 0, \quad x(t) = x_k\right), \tag{2.2}$$

$$P\left(z(t) = V, \quad x(t) = x_k\right), \tag{2.3}$$

gdzie $0 < \alpha < V$, $f_k(z,t)$ oznacza gęstość prawdopodobieństwa, zaś x_k jest *k*-tym stanem pomocniczo wprowadzonego następującego procesu:

$$x(t) = y(t) - a \qquad (x_k = y_k - a,\ k = 1,2,\ldots,n).$$

Prawdopodobieństwa opisane wzorami: (2.1), (2.2) i (2.3) odpowiadają trzem wariantom, odpowiednio: pośredniemu, dolnemu i górnemu przeprowadzonej analizy funkcjonowania rozważanego systemu.

Wzór (2.1) wyraża prawdopodobieństwo, że w ustalonej chwili *t* proces *x* osiągnie stan x_k, a poziom zapasów $z(t)$ należy do przedziału $(0,\alpha)$. Analogicznie – wyrażenia: (2.2), (2.3) są odpowiednio prawdopodobieństwami osiągnięcia w chwili *t* przez poziom zapasów $z(t)$: bariery dolnej ($z(t) = 0$) lub bariery górnej ($z(t) = V$) oraz stanu x_k przez proces $x(t)$.

Prawdopodobieństwa zdarzeń:

$$P\left(0 < z(t) < V, \quad x(t) = x_k\right)$$

wyprowadza się z następującego wzoru:

$$P\left(0 < z(t) < V, \quad x(t) = x_k\right) = \lim_{\alpha \to V} P\left(0 < z(t) < \alpha, \quad x(t) = x_k\right).$$

W celu uwzględnienia zmian w czasie parametrów π_{ij} procesu sterującego $y(t)$, analizowane będzie funkcjonowanie rozważanego systemu w *m* kolejnych okresach czasu[14] $T_1, \ T_2, \ \ldots, \ T_m$.[15]

Niech zatem okresowi T_l odpowiadają intensywności $\pi_{ij}^{(l)}\left(l = 1,2,\ldots,m\right)$.

Analiza działania systemu zostanie przeprowadzona w okresie czasu T_l z uwzględnieniem trzech przypadków:

stanu pośredniego: $0 < z(t) < V$,

stanu dolnego: $z(t) = 0$,

stanu górnego: $z(t) = V$;

dla $t \in T_l$.

[14] W celu uproszczenia zapisu, okres czasu T_l oraz zbiór chwil (momentów) tworzących okres T_l dla $l = \{1,2,\ldots,m\}$ będzie oznaczony tym samym symbolem.

2.1. Stan pośredni procesu opisującego poziom zapasów.

Oto analiza pracy systemu w przypadku, gdy poziom zapasów produktu $z(t)$ spełnia warunek:

$$0 < z(t) < V .$$

Działanie systemu w tym wariancie charakteryzują prawdopodobieństwa postaci:

$$Q_k^{(l)}(\alpha,t) = P\left(0 < z(t) < \alpha, \quad x(t) = x_k\right) = \int_0^{\alpha} f_k^{(l)}(z,t)\,\mathrm{d}z \tag{2.4}$$

dla $0 < \alpha < V$, $t \in T_l$.

Dla procesu $x(t)$ prawdziwe są następujące dwie relacje (zob. np. [49]) opisujące poniższe prawdopodobieństwa warunkowe:

- dla $t \in T_l, \quad t+\tau \in T_l$, mamy:

$$P\left(x(s) = x_i \quad dla \quad t \le s \le t+\tau \mid x(t) = x_i\right) = \exp\left(-\pi_i^{(l)}\tau\right), \tag{2.5}$$

gdzie $\pi_i^{(l)} = \sum_{j \ne i} \pi_{ij}^{(l)}$;

- dla $i \ne k$, $\pi_i^{(l)} \ne 0$, $t \in T_l$, $t+\tau \in T_l$, mamy:

$$P\left(x(s) = x_i \quad \text{dla} \quad t \le s < t+\theta, \quad x(t+\theta) = x_k, \quad 0 < \theta < \tau \mid x(t) = x_i\right) = \\ = \int_0^{\tau} \frac{\pi_{ik}^{(l)}}{\pi_i^{(l)}} \mathrm{d}\left(1 - \exp\left(-\pi_i^{(l)}\theta\right)\right) \tag{2.6}$$

Dystrybuanty $Q_k^{(l)}(\alpha,t)$ spełniają następujący związek (zob. [10], [12]):

$$Q_k^{(l)}(\alpha,t+\tau) = P\left(0 < z(t+\tau) < \alpha, \quad x(t+\tau) = x_k\right) = \\ = \sum_i \int_0^V q_{ik}^{(l)}(z,\alpha;\tau,t) Q_i(\mathrm{d}z,t), \tag{2.7}$$

dla $t \in T_l$, $t+\tau \in T_l$

gdzie prawdopodobieństwa warunkowe dla $i \ne k$ wyrażają się następująco:

$$q_{ik}^{(l)}(z,\alpha;\tau,t) = \\ P\left(x(t) \text{ ma jeden skok w } t+\theta \in (t,t+\tau),\ 0 < h(z+\theta x_i) + (\tau-\theta)x_k < \alpha \mid x(t) = x_i\right) \\ + o_1^{(l)}(\tau;i,k,t) , \tag{2.8}$$

gdy $0 < \alpha < V, \quad i \ne k, \quad z = z(t) \in [0,V]$;

oraz dla $i = k$ prawdopodobieństwa warunkowe wynoszą:

$$q_{kk}^{(l)}(z,\alpha;\tau,t) = \\ P\left(0 < z + x(t)\tau < \alpha, \quad x(s) = x_k \quad \text{dla} \quad t \le s \le t+\tau \mid x(t) = x_k\right) + \\ + o_1^{(l)}(\tau;k,t), \tag{2.9}$$

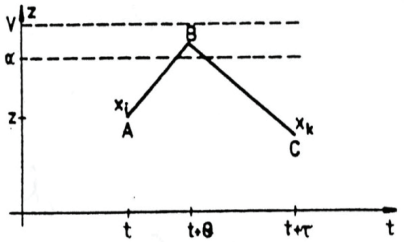
gdy $0 < \alpha < V, \quad z = z(t) \in [0,V]$.

Składniki $o_1^{(l)}(\tau;i,k,t)$, $o_1^{(l)}(\tau;k,t)$ występujące odpowiednio we wzorach (2.8), (2.9) spełniają następujący warunek:

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{o_1^{(l)}(\tau;\ldots)}{\tau} = 0, \tag{2.10}$$

ponieważ informują o prawdopodobieństwie liczby skoków większej niż jeden proces $x(t)$ w przedziale o długości τ.

Wzór (2.8) można zilustrować na rysunku 10.



Rys. 10. Ilustracja graficzna relacji (2.8), $t \in T_l$, $t+\tau \in T_l$.

Łamana ABC (zob. rys. 10) jest wykresem pewnej relacji procesu $z(t)$ w przedziale $[t,t+\tau]$,jeżeli proces $x(t)$ w przedziale $[t,t+\theta)$ był zawsze w stanie x_i, a w przedziale $[t+\theta,t+\tau]$ stale w stanie x_k.

Z określenia procesu $z(t)$ wynika, że współczynnik kierunkowy prostej AB wynosi x_i, a prostej BC: $-x_k$.

Wzór (2.8) wyraża prawdopodobieństwo tego, że:

$$0 < z(t+\tau) < \alpha\,,\ x(t+\tau) = x_k\,,$$

jeżeli jest spełniony warunek $x(t) = x_i$.

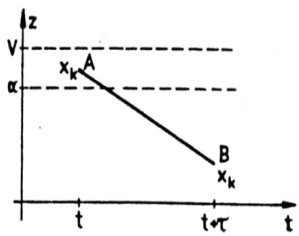
Jeżeli w przedziale $[t,t+\tau]$ jest jeden skok procesu $x(t)$ (zob. rys. 10), to:

$$z(t+\tau) = h\left[h(z+\theta x_i)+(\tau-\theta)x_k\right],\ z = z(t) \in [0,V].$$

Warunek: $0 < z(t+\tau) < \alpha$ jest w tym przypadku równoważny następującemu warunkowi:

$$0 < h(z+\theta x_i)+(\tau-\theta)x_k < \alpha\,.$$

Zależność (2.9) można zilustrować analogicznie rysunkiem 11.



Rys. 11. Ilustracja graficzna relacji (2.9), $t \in T_l$, $t+\tau \in T_l$.

Odcinek AB (zob. rys. 11) jest również wykresem realizacji procesu $z(t)$ w przedziale $[t,t+\tau]$, jeżeli proces sterujący $x(t)$ w tym przedziale był zawsze w stanie x_k. Współczynnik kierunkowy prostej AB wynosi x_k. W tym przypadku mamy:

$$z(t+\tau)=h(x+\tau x_k),\ z=z(t)\in[0,V],$$

a następujący warunek: $0<z(t+\tau)<\alpha,\ 0<\alpha<V$

jest równoważny poniższemu warunkowi: $0<z+\tau x_k<\alpha,\ 0<\alpha<V$.

Wzór (2.9) wyraża prawdopodobieństwo tego, że:

$$0<z(t+\tau)<\alpha,\ x(t+\tau)=x_k, \text{ jeżeli } x(t)=x_k.$$

W następnym paragrafie wyprowadzone będą *explicite* wzory dla prawdopodobieństw $q_{ik}^{(l)}$ określonych za pomocą relacji (2.8) i (2.9).

2.1.1. Prawdopodobieństwa warunkowe w przypadku stanu pośredniego.

Ze wzorów (2.6) i (2.8) otrzymujemy następującą zależność:

$$q_{ik}^{(l)}(z,\alpha;\tau,t)=\int_A \frac{\pi_{ik}^{(l)}}{\pi_i^{(l)}}\mathrm{d}\left(1-\exp\left(-\pi_i^{(l)}\theta\right)\right)+o_1^{(l)}(\tau;i,k,t), \tag{2.11}$$

gdzie zbiór A określony jest następująco:

$A=\{\theta:\ 0<\theta<\tau,\ 0<h(x+\theta x_i)+(\tau-\theta)x_k<\alpha\}$,$i\neq k,\ z=z(t)\in[0,V],\ t\in T_l,\ t+\tau\in T_l$.

Zauważmy, że gdy $x_i>0,\ x_k>0\ t\in T_l,\ t+\tau\in T_l,\tau$ małe, $0<\theta<\tau$, to zbiór A jest postaci:

$$A=\{\theta:\ 0<h(z+\theta x_i)+(\tau-\theta)x_k<\alpha\}=$$
$$=\{\theta:\ 0<h(z+\theta x_i)+(\tau-\theta)x_k<\alpha\}\cap\{\theta:\ z+\theta x_i<V\}=$$
$$=\{\theta:\ 0<z+\theta x_i+(\tau-\theta)x_k<\alpha\}\cap\left\{\theta:\ \theta<\frac{V-z}{x_i}\right\}$$

jest równy w zależności od różnych przypadków, następująco:

dla $x_i-x_k>0,\ \alpha-\tau x_k>z$ mamy: $A=\left\{\theta:\ \theta<\frac{\alpha-z-\tau x_k}{x_i-x_k}\right\}$,

dla $x_i-x_k>0,\ z$ pozostałe mamy: $A=\varnothing$,

dla $x_i-x_k<0,\ \alpha-\tau x_k>z$ mamy: $A=\left\{\theta:\ \theta<\frac{-z-\tau x_k}{x_i-x_k}\right\}$,

dla $x_i-x_k<0,\ \alpha-\tau x_k<z$ mamy: $A=\left\{\theta:\ \frac{\alpha-z-\tau x_k}{x_i-x_k}<\theta<\frac{-z-\tau x_k}{x_i-x_k}\right\}$.

Zatem A jest równe, jak poniżej: (2.12)

dla $x_i-x_k>0,\ \alpha-\tau x_i<z<\alpha-\tau x_k$ mamy: $A=\left\{\theta:\ \theta<\frac{\alpha-z-\tau x_k}{x_i-x_k}\right\}$,

dla $x_i-x_k>0,\ z<\alpha-\tau x_i$ mamy: $A=\{\theta:\ 0<\theta<\tau\}$,

dla $x_i-x_k>0,\ z$ pozostałe mamy: $A=\varnothing$,

dla $x_i-x_k<0,\ z<\alpha-\tau x_k$ mamy: $A=\{\theta:\ 0<\theta<\tau\}$,

dla $x_i - x_k < 0,\ \alpha - \tau x_k < z < \alpha - \tau x_i$ mamy: $A = \left\{ \theta : \ \dfrac{\alpha - z - \tau x_k}{x_i - x_k} < \theta < \tau \right\}$,

dla $x_i - x_k < 0,\ z$ pozostałe mamy: $A = \varnothing$.

Ze wzorów (2.11), (2.12), po scałkowaniu, otrzymujemy relację następującej postaci:

dla $0 < \alpha < V, \quad i \neq k, \quad t \in T_l, \quad t + \tau \in T_l, \quad x_i > 0, \quad x_k > 0,$

$$q_{ik}^{(l)}(z, \alpha; \tau, t) - o_1^{(l)}(\tau; i, k, t); \tag{2.13}$$

jest ona równa, w różnych przypadkach, następująco:

gdy $x_i > x_k,\ \alpha - \tau x_i < z < \alpha - \tau x_k$, to wynosi ona: $\pi_{ik}^{(l)} \dfrac{\alpha - z - \tau x_k}{x_i - x_k} + o^{(l)}(\tau; \alpha, i, k, z)$,

gdy $x_i > x_k,\ 0 \le z < \alpha - \tau x_i$, to wynosi ona: $\pi_{ik}^{(l)} \tau + o^{(l)}(\tau; i)$,

gdy $x_i > x_k$, pozostałe z, to wynosi ona: 0,

gdy $x_i < x_k,\ \alpha - \tau x_k < z < \alpha - \tau x_i$, to wynosi ona: $\pi_{ik}^{(l)} \left(\tau - \dfrac{\alpha - z - \tau x_k}{x_i - x_k} \right) + o^{(l)}(\tau; \alpha, i, k, z)$,

gdy $x_i < x_k,\ 0 \le z < \alpha - \tau x_k$, to wynosi ona: $\pi_{ik}^{(l)} \tau + o^{(l)}(\tau; i)$,

gdy $x_i < x_k$, pozostałe z, to wynosi ona: 0.

Jeżeli zachodzą poniższe nierówności:

$$x_i > x_k, \quad \alpha - \tau x_i < z < \alpha - \tau x_k, \tag{2.14}$$

to człon $o^{(l)}(\tau; \alpha, i, k, z)$ występujący w związku (2.13) ma następującą postać:

$$o^{(l)}(\tau; \alpha, i, k, z) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\alpha - z - \tau x_k}{x_i - x_k} \right)^n \frac{1}{n!}. \tag{2.15}$$

Można sprawdzić, że również:

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{o^{(l)}(\tau; \alpha, i, k, z)}{\tau} = 0. \tag{2.16}$$

Z warunku (2.14) otrzymujemy następującą nierówność:

$$0 < \frac{\alpha - z - \tau x_k}{x_i - x_k} < \tau,$$

która razem ze wzorem (2.15) prowadzi do poniższej zależności:

$$0 < o^{(l)}(\tau; \alpha, i, k, z) < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} = e^{\tau} - 1 - \tau,$$

z której wynika wzór (2.16).

Fakt, że pozostałe wielkości $o^{(l)}(\tau; \ldots)$ występujące we wzorze (2.13) spełniają warunek (2.16) sprawdza się analogicznie.

Analogicznie można wykazać, że gdy:

$$0 < \alpha < V, \quad t \in T_l, \quad t + \tau \in T_l,$$

to prawdopodobieństwa $q_{ik}^{(l)}$ w pozostałych różnych przypadkach wyrażają się następującymi wzorami:

dla $x_i < 0, \quad x_k < 0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{ik}^{(l)}(z, \alpha; \tau, t) - o_1^{(l)}(\tau; i, k, t) \tag{2.17}$$

jest równe, w zależności od różnych sytuacji, jak następuje:

gdy $-\tau x_i < z < -\tau x_k$, $x_i - x_k > 0$, to wynosi ono: $\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau + \frac{z+\tau x_k}{x_i - x_k}\right) + o^{(l)}(\tau;i,k,z)$,

gdy $-\tau x_k < z < \alpha - \tau x_i$, $x_i - x_k > 0$, to wynosi ono: $\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}(\tau;i)$,

gdy $\alpha - \tau x_i < z < \alpha - \tau x_k$, $x_i - x_k > 0$, to wynosi ono: $\pi_{ik}^{(l)}\frac{\alpha - z - \tau x_k}{x_i - x_k} + o^{(l)}(\tau;\alpha,i,k,z)$,

gdy z pozostałe, $x_i - x_k > 0$, to wynosi ono: 0,

gdy $-\tau x_k < z < -\tau x_i$, $x_i - x_k < 0$, to wynosi ono: $-\pi_{ik}^{(l)}\frac{z+\tau x_k}{x_i - x_k} + o^{(l)}(\tau;i,k,z)$,

gdy $\alpha - \tau x_k < z < \alpha - \tau x_i$, $x_i - x_k < 0$, to wynosi ono:

$$\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau - \frac{\alpha - z - \tau x_k}{x_i - x_k}\right) + o^{(l)}(\tau;\alpha,i,k,z),$$

gdy z pozostałe, $x_i - x_k < 0$, to wynosi ono: 0.

Natomiast dla $x_i = 0, \quad x_k > 0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{ik}^{(l)}(z,\alpha;\tau,t) - o_1^{(l)}(\tau;i,k,t) \tag{2.18}$$

jest równe, w różnych sytuacjach, w sposób następujący:

gdy $0 \le z < \alpha - \tau x_k$, to wynosi ono: $\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}(\tau;i)$,

gdy $\alpha - \tau x_k < z < \alpha$, to wynosi ono: $\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau + \frac{\alpha - z - \tau x_k}{x_k}\right) + o^{(l)}(\tau;\alpha,k,z)$,

gdy z pozostałe, to wynosi ono: 0.

Zaś dla $x_i < 0, \quad x_k > 0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{ik}^{(l)}(z,\alpha;\tau,t) - o_1^{(l)}(\tau;i,k,t) \tag{2.19}$$

jest równe, w zależności od poziomu z, jak następuje:

gdy $0 \le z < \alpha - \tau x_k$, to wynosi ono: $\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}(\tau;i)$,

gdy $\alpha - \tau x_k < z < \alpha - \tau x_i$, to wynosi ono: $\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau - \frac{\alpha - z - \tau x_k}{x_i - x_k}\right) + o^{(l)}(\tau;\alpha,i,k,z)$,

gdy z pozostałe, to wynosi ono: 0.

I dalej dla $x_i > 0, \quad x_k = 0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{ik}^{(l)}(z,\alpha;\tau,t) - o_1^{(l)}(\tau;i,k,t) \tag{2.20}$$

jest równe, w zależności od różnych wartości z, następująco:

gdy $0 \le z < \alpha - \tau x_k$, to wynosi ono: $\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}(\tau;i)$,

gdy $\alpha - \tau x_i < z < \alpha$, to wynosi ono: $\pi_{ik}^{(l)}\frac{\alpha - z}{x_i} + o^{(l)}(\tau;\alpha,i,z)$,

gdy z pozostałe, to wynosi ono: 0.

Jeżeli zaś $x_i = 0, \quad x_k = 0$, to prawdopodobieństwo:

$$q_{ik}^{(l)}(z,\alpha;\tau,t) - o_1^{(l)}(\tau;i,k,t) \tag{2.21}$$

jest równe, dla różnych z, jak następuje:

gdy $0 \le z < \alpha$, to wynosi ono: $\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}(\tau;i)$,

gdy z pozostałe, to wynosi ono: 0.

Natomiast dla $x_i < 0, \quad x_k = 0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{ik}^{(l)}(z,\alpha;\tau,t) - o_1^{(l)}(\tau;i,k,t) \tag{2.22}$$

jest równe, w różnych przypadkach, następująco:

gdy $0 < z < -\tau x_i$, to wynosi ono: $-\pi_{ik}^{(l)} \dfrac{z}{x_i} + o^{(l)}(\tau;i,z)$,

gdy $-\tau x_i < z < \alpha$, to wynosi ono: $\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}(\tau;i)$,

gdy $\alpha < z < \alpha - \tau x_i$, to wynosi ono: $\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau - \dfrac{\alpha - z}{x_i}\right) + o^{(l)}(\tau;\alpha,i,z)$,

gdy z pozostałe, to wynosi ono: 0.

W przypadku $x_i > 0, \quad x_k < 0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{ik}^{(l)}(z,\alpha;\tau,t) - o_1^{(l)}(\tau;i,k,t) \tag{2.23}$$

jest równe, w zależności od wartości z, jak poniżej:

gdy $0 \le z < -\tau x_k$, to wynosi ono: $-\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau + \dfrac{z + \tau x_k}{x_i - x_k}\right) + o^{(l)}(\tau;i,k,z)$,

gdy $-\tau x_k < z < \alpha - \tau x_i$, to wynosi ono: $\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}(\tau;i)$,

gdy $\alpha - \tau x_i < z < \alpha - \tau x_k$, to wynosi ono: $\pi_{ik}^{(l)} \dfrac{\alpha - z - \tau x}{x_i - x_k} + o^{(l)}(\tau;\alpha,i,k,z)$,

gdy z pozostałe, to wynosi ono: 0.

Zaś dla $x_i = 0, \quad x_k < 0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{ik}^{(l)}(z,\alpha;\tau,t) - o_1^{(l)}(\tau;i,k,t) \tag{2.24}$$

jest równe, dla różnych poziomów z, jak poniżej:

gdy $0 < z < -\tau x_k$, to wynosi ono: $-\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau - \dfrac{z + \tau x_k}{x_k}\right) + o^{(l)}(\tau;k,z)$,

gdy $-\tau x_k < z < \alpha$, to wynosi ono: $\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}(\tau;i)$,

gdy $\alpha < z < \alpha - \tau x_k$, to wynosi ono: $\pi_{ik}^{(l)} \dfrac{\alpha - z - \tau x_k}{-x_k} + o^{(l)}(\tau;\alpha,k,z)$,

gdy z pozostałe, to wynosi ono: 0.

Jeżeli zaś $i = k, \quad t \in T_l, \quad t + \tau \in T_l, \quad 0 < \alpha < V$, to ze wzorów (2.5) i (2.9) wynikają kolejne równości dotyczące następujące prawdopodobieństwa:

$$q_{kk}^{(l)}(z,\alpha;\tau,t) - o_1^{(l)}(\tau;k,i) \tag{2.25}$$

Wtedy powyższe prawdopodobieństwo, w zależności od wartości z, jest równe następująco:

gdy $0 \le z < \alpha - \tau x_k, \ x_k > 0$, to wynosi ono: $1 - \pi_k^{(l)}\tau + o^{(l)}(\tau;k)$,

gdy z pozostałe, $x_k > 0$, to wynosi ono: 0.

Natomiast prawdopodobieństwo:

$$q_{kk}^{(l)}(z,\alpha;\tau,t) - o_1^{(l)}(\tau;t,k) \tag{2.26}$$

jest równe, w zależności od poziomu z, jak poniżej:

gdy $0 < z < \alpha, \ x_k = 0$, to wynosi ono: $1 - \pi_k^{(l)}\tau + o^{(l)}(\tau;k)$,

gdy z pozostałe, $x_k = 0$, to wynosi ono: 0.

Ponadto prawdopodobieństwo:

$$q_{kk}^{(l)}(z,\alpha;\tau,t)-o_1^{(l)}(\tau;t,k) \tag{2.27}$$

jest równe, dla różnych przypadków, jak poniżej:

gdy $-\tau x_k < z < \alpha - \tau x_k$, $x_k < 0$, to wynosi ono: $1-\pi_k^{(l)}\tau + o^{(l)}(\tau;k)$,

gdy z pozostałe, $x_k < 0$, to wynosi ono: 0.

Człony $o^{(l)}(\tau:\ldots)$ występujące we wzorach (2.17)-(2.27) są w otoczeniu $\tau = 0$ wielkościami nieskończenie małymi rzędu wyższego niż τ; spełniają zatem warunek (2.16).

Otrzymane zależności (2.13), (2.17)-(2.27) zostaną wykorzystane w następnym paragrafie do uzyskania relacji, jakie spełniają funkcje gęstości $f_k^{(l)}(z,t)$ w okresie T_l.

2.1.2. Gęstości rozkładów prawdopodobieństwa, a intensywności procesu wejścia podsystemu *M*.

W celu wyznaczenia następujących prawdopodobieństw:

$$Q_k^{(l)}(\alpha,t)$$

(zob. wzór (2.4)), opisujących funkcjonowanie systemu w okresie T_l i stanie pośrednim poziomu zapasów magazynu, wyprowadzę równania, które spełniają funkcje gęstości $f_k^{(l)}(z,t)$ dla $t \in T_l$.

Wykorzystując wzory (2.4), (2.7), (2.13), (2.18), (2.19) i (2.25), dla $x_k > 0$, $t \in T_l$, $t+\tau \in T_l$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} Q_k^{(l)}(\alpha,t+\tau) &= \int_0^{\alpha} f_k^{(l)}(z,t+\tau)\,\mathrm{d}z = \\ &= \sum_i \left\{ \int_0^V q_{ik}^{(l)}(z,\alpha;\tau,t) f_i^{(l)}(z,t)\,\mathrm{d}z + Q_i^{(l)}(\{0\},t) q_{ik}^{(l)}(0,\alpha;\tau,t) + \right. \\ &\left. + Q_i^{(l)}(\{V\},t) q_{ik}^{(l)}(V,\alpha;\tau,t) \right\} = \\ &= A_{k,l}^{+} + A_{k,l}^{0} + A_{k,l}^{-}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

Gdzie poszczególne składniki są przedstawione poniżej:

I tak składnik pierwszy $A_{k,l}^{+}$ jest równy:

$$A_{k,l}^{+}=\sum_{\substack{i\neq k\\ x_i>0}}\Big\{Q_i^{(l)}\left(\{0\},t\right)q_{ik}^{(l)}\left(0,\alpha;\tau,t\right)+Q_i^{(l)}\left(\{V\},t\right)q_{ik}^{(l)}\left(V,\alpha;\tau,t\right)+$$

$$+\int_0^V q_{ik}^{(l)}\left(z,\alpha;\tau,t\right)f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z\Big\}=$$

$$=\sum_{\substack{i\neq k\\ x_i>x_k}}\Big\{\left(\pi_{ik}^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)\right)Q_i^{(l)}\left(\{0\},t\right)+$$

$$+o^{(l)}\left(\tau\right)Q_i^{(l)}\left(\{V\},t\right)+\int_0^{\alpha-\tau x_i}\left(\pi_{ik}^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)\right)f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+$$

$$+\int_{\alpha-\tau x_i}^{\alpha-\tau x_k}\left[\pi_{ik}^{(l)}\frac{\alpha-z-\tau x_k}{x_i-x_k}+o^{(l)}\left(\tau;\alpha,z\right)\right]f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+$$

$$+\int_{\alpha-\tau x_k}^{V}o^{(l)}\left(\tau\right)f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z\Big\}+\sum_{\substack{i\neq k\\ x_i<x_k}}\Big\{\left(\pi_{ik}^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)\right)Q_i^{(l)}\left(\{0\},t\right)+$$

$$+o^{(l)}\left(\tau\right)Q_i^{(l)}\left(\{V\},t\right)+\int_0^{\alpha-\tau x_k}\left(\pi_{ik}^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)\right)f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+$$

$$+\int_{\alpha-\tau x_k}^{\alpha-\tau x_i}\left[\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau-\frac{\alpha-z-\tau x_k}{x_i-x_k}\right)+o^{(l)}\left(\tau;\alpha,z\right)\right]f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+ \tag{2.29}$$

$$+\int_{\alpha-\tau x_i}^{V}o^{(l)}\left(\tau\right)f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z\Big\}.$$

Z kolei składnik drugi $A_{k,l}^{0}$ wynosi:

$$A_{k,l}^{0}=Q_k^{(l)}\left(\{0\},t\right)q_{kk}^{(l)}\left(0,\alpha;\tau,t\right)+Q_k^{(l)}\left(\{V\},t\right)q_{kk}^{(l)}\left(V,\alpha;\tau,t\right)+$$

$$+\int_0^V q_{kk}^{(l)}\left(z,\alpha;\tau,t\right)f_k^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z=$$

$$=\left(1-\pi_k^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)\right)Q_k^{(l)}\left(\{0\},t\right)+ \tag{2.30}$$

$$+o^{(l)}\left(\tau\right)Q_k^{(l)}\left(\{V\},t\right)+\int_0^{\alpha-\tau x_k}\left(1-\pi_k^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)\right)f_k^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+$$

$$+\int_{\alpha-\tau x_k}^{V}o^{(l)}\left(\tau\right)f_k^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z.$$

Natomiast składnik trzeci $A_{k,l}^{-}$, to:

$$A_{k,l}^{-}=\sum_{\substack{i\neq k\\ x_i\le 0}}\Big\{Q_i^{(l)}\big(\{0\},t\big)q_{ik}^{(l)}\big(0,\alpha;\tau,t\big)+Q_i^{(l)}\big(\{V\},t\big)q_{ik}^{(l)}\big(V,\alpha;\tau,t\big)+$$

$$+\int_0^V q_{ik}^{(l)}\big(z,\alpha;\tau,t\big)f_i^{(l)}\big(z,t\big)\mathrm{d}z\Big\}=$$

$$=\sum_{\substack{i\neq k\\ x_i\le 0}}\Big\{\Big(\pi_{ik}^{(l)}\tau+o^{(l)}\big(\tau\big)\Big)Q_i^{(l)}\big(\{0\},t\big)+ \tag{2.31}$$

$$+o^{(l)}\big(\tau\big)Q_i^{(l)}\big(\{V\},t\big)+\int_0^{\alpha-\tau x_k}\Big(\pi_{ik}^{(l)}\tau+o^{(l)}\big(\tau\big)\Big)f_i^{(l)}\big(z,t\big)\mathrm{d}z+$$

$$+\int_{\alpha-\tau x_k}^{\alpha-\tau x_i}\left[\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau-\frac{\alpha-z-\tau x_k}{x_i-x_k}\right)+o^{(l)}\big(\tau;\alpha,z\big)\right]f_i^{(l)}\big(z,t\big)\mathrm{d}z+\int_{\alpha-\tau x_i}^{V}o^{(l)}\big(\tau\big)f_i^{(l)}\big(z,t\big)\mathrm{d}z\Big\}.$$

W wyniku zróżniczkowania równania (2.28) stronami względem α i po uwzględnieniu przy tym zależności (2.29)-(2.31), mamy:

$$f_k^{(l)}\big(\alpha,t+\tau\big)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}A_{k,l}^{+}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}A_{k,l}^{0}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}A_{k,l}^{-}, \tag{2.32}$$

gdzie składnik pierwszy $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}A_{k,l}^{+}$, to:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}A_{k,l}^{+}=\sum_{\substack{i\neq k\\ x_i>x_k}}\Big\{\Big(\pi_{ik}^{(l)}\tau+o^{(l)}\big(\tau\big)\Big)f_i^{(l)}\big(\alpha-\tau x_i,t\big)+\int_{\alpha-\tau x_i}^{\alpha-\tau x_k}\frac{\pi_{ik}^{(l)}}{x_i-x_k}f_i^{(l)}\big(z,t\big)\mathrm{d}z+$$

$$-\pi_{ik}^{(l)}\tau f_i^{(l)}\big(\alpha-\tau x_i,t\big)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_{\alpha-\tau x_i}^{\alpha-\tau x_k}o^{(l)}\big(\tau;\alpha,z\big)f_i^{(l)}\big(z,t\big)\mathrm{d}z-o^{(l)}\big(\tau\big)f_i^{(l)}\big(\alpha-\tau x_i,t\big)\Big\}+$$

$$+\sum_{\substack{i\neq k\\ x_i<x_k}}\Big\{\Big(\pi_{ik}^{(l)}\tau+o^{(l)}\big(\tau\big)\Big)f_i^{(l)}\big(\alpha-\tau x_k,t\big)+\int_{\alpha-\tau x_k}^{\alpha-\tau x_i}\frac{\pi_{ik}^{(l)}}{x_k-x_i}f_i^{(l)}\big(z,t\big)\mathrm{d}z+$$

$$-f_i^{(l)}\big(\alpha-\tau x_i,t\big)o^{(l)}\big(\tau\big)-\pi_{ik}^{(l)}\tau f_i^{(l)}\big(\alpha-\tau x_k,t\big)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_{\alpha-\tau x_k}^{\alpha-\tau x_i}o^{(l)}\big(\tau;\alpha,z\big)f_i^{(l)}\big(z,t\big)\mathrm{d}z\Big\},$$

dalej składnik drugi $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}A_{k,l}^{0}$ wynosi:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}A_{k,l}^{0}=\Big(1-\pi_k^{(l)}\tau+o^{(l)}\big(\tau\big)\Big)f_k^{(l)}\big(\alpha-\tau x_k,t\big)-o^{(l)}\big(\tau\big)f_k^{(l)}\big(\alpha-\tau x_k,t\big),$$

oraz składnik trzeci $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}A_{k,l}^{-}$ jest równy:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}A_{k,l}^{-}=\sum_{\substack{i\neq k\\ x_i\le 0}}\Big\{\Big(\pi_{ik}^{(l)}\tau+o^{(l)}\big(\tau\big)\Big)f_i^{(l)}\big(\alpha-\tau x_k,t\big)+\int_{\alpha-\tau x_k}^{\alpha-\tau x_i}\frac{\pi_{ik}^{(l)}}{x_k-x_i}f_i^{(l)}\big(z,t\big)\mathrm{d}z+$$

$$-\pi_{ik}^{(l)}\tau f_i^{(l)}\big(\alpha-\tau x_k,t\big)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_{\alpha-\tau x_k}^{\alpha-\tau x_i}o^{(l)}\big(\tau;\alpha,z\big)f_i^{(l)}\big(z,t\big)\mathrm{d}z-o^{(l)}\big(\tau\big)f_i^{(l)}\big(\alpha-\tau x_i,t\big)\Big\}.$$

Człon $f_k^{(l)}(\alpha, t+\tau)$ występujący w relacji (2.32) zostanie rozwinięty według wzoru Taylora do wyrazu rzędu drugiego włącznie, a następnie wyrażenie $f_k^{(l)}(\alpha,t)$ zostanie przeniesione na lewą stronę wzoru (2.32).

Po obustronnym podzieleniu otrzymanej równości przez τ i przejściu do granicy z $\tau \to 0$, otrzymujemy:

dla $t \in T_l$ mamy, co następuje:

$$\frac{\partial f_k^{(l)}(\alpha,t)}{\partial t} = \\ = -\pi_k^{(l)} f_k^{(l)}(\alpha,t) - x_k \frac{\partial f_k^{(l)}(\alpha,t)}{\partial \alpha} + \sum_{i \neq k} f_i^{(l)}(\alpha,t)\pi_{ik}^{(l)}. \tag{2.33}$$

Dla stanów spełniających warunek: $x_k \leq 0$, równanie (2.33) można otrzymać podobnie, wykorzystując podane wcześniej pozostałe wzory określające funkcje $q_{ik}^{(l)}(z,\alpha;\tau,t)$.

Tak więc dla stanu pośredniego poziomu zapasów $z(t)$ funkcje gęstości $f_k^{(l)}(z,t)$ spełniają następujący układ równań różniczkowych:

dla $0 < z < V$, $t \in T_l$, $k = 1,2,\ldots,n$, mamy, co następuje:

$$\frac{\partial f_k^{(l)}(z,t)}{\partial t} = \\ = -\pi_k^{(l)} f_k^{(l)}(z,t) - x_k \frac{\partial f_k^{(l)}(z,t)}{\partial z} + \sum_{i \neq k} f_i^{(l)}(z,t)\pi_{ik}^{(l)}. \tag{2.34}$$

Równania (2.34) zostaną wykorzystane, między innymi, do opisu funkcjonowania badanego systemu w okresie T_l.

2.2. Bariera dolna procesu opisującego poziom zapasów.

Zostanie teraz dokonana analiza pracy systemu w okresie T_l w przypadku, gdy poziom zapasu produktu spełnia następujący warunek:

$$z(t) = 0.$$

Działanie systemu w tym wariancie dla $t \in T_l$ charakteryzują prawdopodobieństwa następującej postaci:

$$Q_k^{(l)}(\{0\},t) = P(z(t) = 0, \quad x(t) = x_k). \tag{2.35}$$

Prawdopodobieństwa $Q_k^{(l)}(\{0\},t)$ spełniają następujący związek (analogiczny do relacji (2.7)-(2.9)):

$$Q_k^{(l)}(\{0\},t+\tau) = P(z(t+\tau) = 0, \quad x(t+\tau) = x_k) = \\ = \sum_i \int_0^V q_{ik}^{(l)}(z,\{0\};\tau,t)\, Q_i(\mathrm{d}z,t) \tag{2.36}$$

dla $t \in T_l$, $t+\tau \in T_l$,

gdzie prawdopodobieństwo warunkowe $q_{ik}^{(l)}$ wynosi:

$$q_{ik}^{(l)}(z,\{0\};\tau,t) = \\ = P(x(t) \text{ ma jeden skok w } t+\theta \in (t,t+\tau), \\ h(z+\theta x_i) + (\tau-\theta)x_k \leq 0 \mid x(t) = x_k) + o_1^{(l)}(\tau;i,k,t), \tag{2.37}$$

gdy $i \neq k, \quad z = z(t) \in [0,V]$;

natomiast prawdopodobieństwo warunkowe $q_{kk}^{(l)}$ wynosi:

$$q_{kk}^{(l)}(z,\{0\};\tau,t) = \\ = P\left(z + \tau x(t) \leq 0, \quad x(s) = x_k \quad \text{dla} \quad s \in [t,t+\tau] \mid x(t) = x_k\right) + o_1^{(l)}(\tau;k,t) \tag{2.38}$$

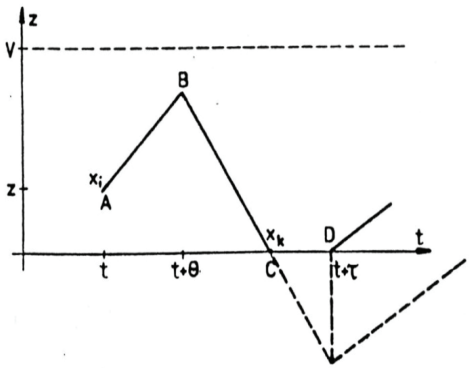
przy czym $z = z(t) \in [0,V]$.

Składniki $o_1^{(l)}(\tau;i,k,t)$, $o_1^{(l)}(\tau;k,t)$ występujące we wzorach (2.37), (2.38) spełniają warunek (2.10) (zob. wzory (2.8), (2.9)).

Wzór (2.37) wyraża prawdopodobieństwo tego, że:

$$z(t+\tau) = 0, \; x(t+\tau) = x_k, \text{ jeśli } x(t) = x_i,$$

co ilustruje rysunek 12.



Rys. 12. Ilustracja graficzna relacji (2.37), $t \in T_l$, $t+\tau \in T_l$.

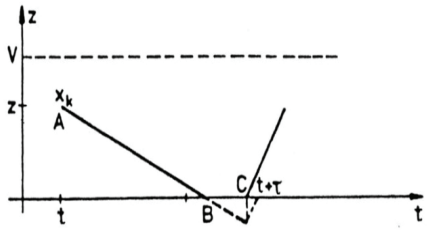
Łamana ABCD (zob. rys. 12) przedstawia dla $t \in [t,t+\tau]$ realizację procesu $z(t)$, jeżeli proces sterujący $x(t)$ ma w przedziale $[t,t+\tau]$ jeden skok, tzn. $x(s) = x_i$ dla $s \in [t,t+\theta]$ oraz $x(s) = x_k$ dla $s \in [t+\theta,t+\tau]$.

Przy tym $z(t+\tau) = h\left[h(z+\theta x_i) + (\tau-\theta)x_k\right]$, $z = z(t) \in [0,V]$.

Warunek następujący: $z(t+\tau) = 0$

jest równoważny poniższemu warunkowi: $h(z+\theta x_i) + (\tau-\theta)x_k \leq 0$.

Analogicznie można zilustrować relację (2.38) rysunkiem 13.



Rys. 13. Ilustracja graficzna relacji (2.38), $t \in T_l$, $t+\tau \in T_l$.

Łamana ABC (zob. rys. 13) jest wykresem realizacji procesu $z(t)$ w przedziale $[t,t+\tau]$, jeżeli proces sterujący $x(t)$ w przedziale $[t,t+\tau]$ przebywał stale w stanie x_k. Wówczas $z(t+\tau)=h(z+\tau x_k)$, $z=z(t)\in[0,V]$.

Związek (2.38) wyraża prawdopodobieństwo tego, że $z(t+\tau)=0$, $x(t+\tau)=x_k$ przy hipotezie $x(t)=x_k$.

Oczywiście następujący warunek: $z(t+\tau)=0$
jest równoważny poniższemu warunkowi: $z+\tau x_k \le 0$.

W następnym paragrafie będą wyprowadzone *explicite* wzory dla prawdopodobieństw $q_{ik}^{(l)}$ określonych za pomocą zależności (2.37), (2.38).

2.2.1. Prawdopodobieństwa warunkowe w przypadku bariery dolnej.

Wykorzystując relacje (2.6) i (2.37) otrzymujemy, co następuje:

$$q_{ik}^{(l)}(z,\{0\};\tau,t)=\int_A \frac{\pi_{ik}^{(l)}}{\pi_i^{(l)}}\,\mathrm{d}\left(1-\exp\left(-\pi_i^{(l)}\theta\right)\right)+o_1^{(l)}(\tau;i,k,t), \qquad (2.39)$$

gdzie zbiór A określony jest następująco:

$$A=\{\theta:\ \ 0<\theta<\tau,\ \ \ h(x+\theta x_i)+(\tau-\theta)x_k\le 0\},$$

dla $i\neq k$, $z=z(t)\in[0,V]$, $t\in T_l$, $t+\tau\in T_l$.

Jeżeli $x_i>0$, $\ x_k<0\ \ \ t\in T_l$, $\ \ t+\tau\in T_l$, τ małe, $0<\theta<\tau$, wówczas zbiór:

$$\{\theta:\ \ h(z+\theta x_i)+(\tau-\theta)x_k\le 0\}=$$

$$=\{\theta:\ \ h(z+\theta x_i)+(\tau-\theta)x_k\le 0\}\cap\{\theta:\ \ z+\theta x_i<V\}=$$

$$=\{\theta:\ \ z+\theta x_i+(\tau-\theta)x_k\le 0\}\cap\left\{\theta:\ \ \theta<\frac{V-z}{x_i}\right\}$$

jest równy, w zależności od z, jak poniżej:

gdy $z<-\tau x_k$, to mamy: $\left\{\theta:\ \ \theta\le\dfrac{-z-\tau x_k}{x_i-x_k}\right\}\cap\left\{\theta:\ \ \theta<\dfrac{V-z}{x_i}\right\}$,

gdy z pozostałe, to mamy: $\varnothing$.

Stąd i z określenia zbioru A mamy, w zależności od poziomu z, następujące równości: dla $z<-\tau x_k$ postać zbioru A jest następująca:

$$A=\left\{\theta:\quad \theta\le\frac{-z-\tau x_k}{x_i-x_k}\right\}, \tag{2.40}$$

zaś dla z pozostałych mamy: $A=\varnothing$.

Na podstawie wzorów (2.40) i (2.39), po scałkowaniu, otrzymujemy następujące prawdopodobieństwa:

$$q_{ik}^{(l)}\left(z,\{0\};\tau,t\right)-o_1^{(l)}\left(\tau;i,k,t\right) \tag{2.41}$$

które, przyjmują różne, następujące wartości w zależności od poziomu z:

gdy $z<-\tau x_k$, to wynoszą one: $\pi_{ik}^{(l)}\dfrac{z+\tau x_k}{x_k-x_i}+o^{(l)}\left(\tau;i,k,z\right)$,

a gdy z pozostałe, wówczas wynoszą: 0.

Analogicznie można wykazać, że prawdopodobieństwa $q_{ik}^{(l)}$ w pozostałych przypadkach wyrażają się następującymi wzorami w zależności od różnych wartości x_i oraz x_k.

I tak dla $x_i=0,\quad x_k<0$ prawdopodobieństwa:

$$q_{ik}^{(l)}\left(z,\{0\};\tau,t\right)-o_1^{(l)}\left(\tau;i,k,t\right), \tag{2.42}$$

w zależności od różnych poziomów z przyjmują następujące wartości:

gdy $0\le z<-\tau x_k$, wówczas wynoszą: $\pi_{ik}^{(l)}\dfrac{z+\tau x_k}{x_k}+o^{(l)}\left(\tau;k,z\right)$,

a gdy z pozostałe, to wynoszą: 0.

Natomiast dla $x_i<0,\quad x_k<0$ prawdopodobieństwa:

$$q_{ik}^{(l)}\left(z,\{0\};\tau,t\right)-o_1^{(l)}\left(\tau;i,k,t\right), \tag{2.43}$$

w różnych przypadkach mogą być równe, jak następuje:

gdy $0\le z<-\tau x_i,\ x_i-x_k>0$, to mamy: $\pi_{ik}^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau;i\right)$,

gdy $\alpha-\tau x_i<z<-\tau x_k,\ x_i-x_k>0$, to mamy: $\pi_{ik}^{(l)}\dfrac{z+\tau x_k}{x_k-x_i}+o^{(l)}\left(\tau;z,i,k\right)$,

gdy z pozostałe, $x_i-x_k>0$, to mamy: 0,

gdy $0\le z<-\tau x_k,\ x_i-x_k<0$, to mamy: $\pi_{ik}^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau;i\right)$,

gdy $-\tau x_k<z<-\tau x_i,\ x_i-x_k<0$, to mamy: $\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau-\dfrac{z+\tau x_k}{x_k-x_i}\right)+o^{(l)}\left(\tau;z,i,k\right)$,

gdy z pozostałe, $x_i-x_k<0$, to mamy: 0.

W przypadku $x_i>0,\quad x_k=0$ prawdopodobieństwo spełnia warunek:

$$q_{ik}^{(l)}\left(z,\{0\};\tau,t\right)-o_1^{(l)}\left(\tau;i,k,t\right)=0; \tag{2.44}$$

gdy $0\le z<V$

W sytuacji $x_i=0,\quad x_k=0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{ik}^{(l)}\left(z,\{0\};\tau,t\right)-o_1^{(l)}\left(\tau;i,k,t\right) \tag{2.45}$$

w zależności od poziomu z, może być równe, jak poniżej:

gdy $z=0$, to wynosi ono: $\pi_{ik}^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau;i\right)$,

a gdy $0<z\le V$, to wynosi ono: 0.

W sytuacji $x_k>0,\quad x_i$ - dowolny stan wówczas prawdopodobieństwo spełnia następujący warunek:

$$q_{ik}^{(l)}(z,\{0\};\tau,t)=o_1^{(l)}(\tau;i,k,t) \tag{2.46}$$

Dalej dla $x_i<0,\quad x_k=0$ prawdopodobieństwa:

$$q_{ik}^{(l)}\left(z,\{0\};\tau,t\right)-o_1^{(l)}\left(\tau;i,k,t\right) \tag{2.47}$$

mogą w zależności od poziomu z być równe, jak poniżej:

gdy $0\le z<-\tau x_i$, to wynoszą one: $\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau+\dfrac{z}{x_i}\right)+o^{(l)}\left(\tau;z,i\right)$,

a gdy z pozostałe, wtedy wynoszą: 0 .

Jeżeli $i=k,\quad t\in T_l,\quad t+\tau\in T_l$, to ze wzorów (2.5) i (2.38) wynika następująca równość dotycząca prawdopodobieństwa:

$$q_{kk}^{(l)}\left(z,\{0\};\tau,t\right)-o_1^{(l)}\left(\tau;k,i\right), \tag{2.48}$$

które przyjmuje różne poniższe wartości w następującej zależności od różnych poziomów z :

gdy $0\le z\le V,\ x_k>0$, to przyjmuje ono wartość: 0,

gdy $0\le z<-\tau x_k,\ x_k\le 0$, to przyjmuje ono wartość: $1-\pi_k^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau;k\right)$,

zaś gdy z pozostałe, $x_k\le 0$, to przyjmuje ono również wartość: 0.

Człony $o^{(l)}(\tau:\ldots)$ występujące we wzorach (2.41)-(2.48) są w otoczeniu $\tau=0$ wielkościami nieskończenie małymi rzędu wyższego niż τ; spełniają więc warunek (2.16).

Otrzymane równości (2.41)-(2.48) będą wykorzystane w następnym paragrafie do wyznaczenia równań różniczkowych, które spełniają prawdopodobieństwa (2.35) opisujące funkcjonowanie systemu w okresie T_l w przypadku bariery dolnej.

2.2.2. Bariera dolna, a intensywności procesu sterującego poziomem zapasów.

W celu wyznaczenia następujących prawdopodobieństw:

$$Q_k^{(l)}(\{0\},t)$$

(zob. wzór (2.35)) charakteryzujących działanie systemu w okresie T_l w przypadku bariery dolnej wyprowadzę równania, które spełniają funkcje $Q_k^{(l)}(\{0\},t)$ dla $t\in T_l$.

Wykorzystując wzór (2.36) oraz relacje (2.41), (2.42) i (2.43), dla $x_k<0,\quad t\in T_l,\quad t+\tau\in T_l$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
&Q_k^{(l)}\left(\{0\},t+\tau\right)=\\
&=\sum_i\left\{\int_0^V q_{ik}^{(l)}\left(z,\{0\};\tau,t\right)f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+\right.\\
&\left.+Q_i^{(l)}\left(\{0\},t\right)q_{ik}^{(l)}\left(0,\{0\};\tau,t\right)+Q_i^{(l)}\left(\{V\},t\right)q_{ik}^{(l)}\left(V,\{0\};\tau,t\right)\right\}=\\
&=A_{k,l}^{+}+A_{k,l}^{0}+A_{k,l}^{-},
\end{aligned} \tag{2.49}$$

gdzie poszczególne składniki wynoszą jak poniżej.

Składnik pierwszy $A_{k,l}^{+}$ wynosi:

$$A_{k,l}^{+}=\sum_{\substack{i\neq k\\ x_i\geq 0}}\left\{\int_0^V q_{ik}^{(l)}\left(z,\{0\};\tau,t\right)f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+Q_i^{(l)}\left(\{0\},t\right)q_{ik}^{(l)}\left(0,\{0\};\tau,t\right)+\right.$$

$$\left.+Q_i^{(l)}\left(\{V\},t\right)q_{ik}^{(l)}\left(V,\{0\};\tau,t\right)\right\}=$$

$$=\sum_{\substack{i\neq k\\ x_i\geq 0}}\left\{\int_0^{-\tau x_k}\left[\pi_{ik}^{(l)}\frac{z+\tau x_k}{x_k-x_i}+o^{(l)}\left(\tau;z\right)\right]f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+\right.$$

$$\left.+\int_{-\tau x_k}^V o^{(l)}\left(\tau\right)f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+Q_i^{(l)}\left(\{0\},t\right)\left(\pi_{ik}^{(l)}\frac{\tau x_k}{x_k-x_i}+o^{(l)}\left(\tau;0\right)\right)+Q_i^{(l)}\left(\{V\},t\right)o^{(l)}\left(\tau\right)\right\},$$

Drugi składnik $A_{k,l}^{0}$ jest równy:

$$A_{k,l}^{0}=Q_k^{(l)}\left(\{0\},t\right)q_{kk}^{(l)}\left(0,\{0\};\tau,t\right)+Q_k^{(l)}\left(\{V\},t\right)q_{kk}^{(l)}\left(V,\{0\};\tau,t\right)+$$

$$+\int_0^V q_{kk}^{(l)}\left(z,\{0\};\tau,t\right)f_k^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z=$$

$$=\left(1-\pi_k^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)\right)Q_k^{(l)}\left(\{0\},t\right)+$$

$$+o^{(l)}\left(\tau\right)Q_k^{(l)}\left(\{V\},t\right)+\int_0^{-\tau x_k}\left(1-\pi_k^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)\right)f_k^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+$$

$$+\int_{-\tau x_k}^V o^{(l)}\left(\tau\right)f_k^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z,$$

Trzeci zaś składnik $A_{k,l}^{-}$, to:

$$A_{k,l}^{-}=\sum_{\substack{i\neq k\\ x_i<0}}\left\{\int_0^V q_{ik}^{(l)}\left(z,\{0\};\tau,t\right)f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+q_{ik}^{(l)}\left(0,\{0\};\tau,t\right)Q_i^{(l)}\left(\{0\},t\right)+\right.$$

$$\left.+q_{ik}^{(l)}\left(V,\{0\};\tau,t\right)Q_i^{(l)}\left(\{V\},t\right)\right\}=$$

$$=\sum_{\substack{i\neq k\\ x_i<x_k}}\left\{\left(\pi_{ik}^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)\right)Q_i^{(l)}\left(\{0\},t\right)+\right.$$

$$+o^{(l)}\left(\tau\right)Q_i^{(l)}\left(\{V\},t\right)+\int_0^{-\tau x_k}\left(\pi_{ik}^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)\right)f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+$$

$$\left.+\int_{-\tau x_k}^{-\tau x_i}\left[\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau+\frac{z+\tau x_k}{x_k-x_i}\right)+o^{(l)}\left(\tau;z\right)\right]f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+\int_{-\tau x_i}^V o^{(l)}\left(\tau\right)f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z\right\}+$$

$$\sum_{\substack{i\neq k\\ x_i>x_k}}\left\{\left(\pi_{ik}^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)\right)Q_i^{(l)}\left(\{0\},t\right)+o^{(l)}\left(\tau\right)Q_i^{(l)}\left(\{V\},t\right)+\right.$$

$$+\int_0^{-\tau x_i}\left(\pi_{ik}^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)\right)f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+\int_{-\tau x_i}^{-\tau x_k}\left[\pi_{ik}^{(l)}\frac{z+\tau x_k}{x_k-x_i}+o^{(l)}\left(\tau;z\right)\right]f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+$$

$$\left.+\int_{-\tau x_k}^V o^{(l)}\left(\tau\right)f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z\right\}.$$

Po przeniesieniu wielkości $Q_k^{(l)}(\{0\},t)$ na lewą stronę wzoru (2.49) i po obustronnym podzieleniu otrzymanej równości przez τ i po przejściu do granicy przy $\tau \to 0$ uzyskujemy równość następującą:

$$\frac{\partial Q_k^{(l)}\left(\{0\},t\right)}{\partial t} = \\ = -\pi_k^{(l)} Q_k^{(l)}\left(\{0\},t\right) - x_k f_k^{(l)}\left(0,t\right) + \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i \le 0}} Q_i^{(l)}\left(\{0\},t\right)\pi_{ik}^{(l)} + \\ + \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i > 0}} \frac{x_k}{x_k - x_i} Q_i^{(l)}\left(\{0\},t\right)\pi_{ik}^{(l)}. \tag{2.50}$$

Z określenia procesu $z(t)$ i własności procesu $x(t)$ wynika, że:

$$Q_i^{(l)}(\{0\},t) = 0, \text{ gdy } x_i > 0. \tag{2.51}$$

Zatem wzór (2.50) przyjmuje postać następującą:

$$\frac{\partial Q_k^{(l)}\left(\{0\},t\right)}{\partial t} = \\ = -\pi_k^{(l)} Q_k^{(l)}\left(\{0\},t\right) - x_k \partial f_k^{(l)}\left(0,t\right) + \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i \le 0}} Q_i^{(l)}\left(\{0\},t\right)\pi_{ik}^{(l)}. \tag{2.52}$$

Relacje (2.52) dla $x_k = 0$ wyprowadza się analogicznie, jak zależność (2.50).

Tak więc prawdopodobieństwa $Q_k^{(l)}(\{0\},t)$, opisujące funkcjonowanie systemu w przypadku bariery dolnej, spełniają następujący układ równań, w zależności od różnych poziomów x_k:

dla $x_k \le 0,\ t \in T_l$, mamy:

$$\frac{\partial Q_k^{(l)}\left(\{0\},t\right)}{\partial t} = \\ = -\pi_k^{(l)} Q_k^{(l)}\left(\{0\},t\right) - x_k f_k^{(l)}\left(0,t\right) + \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i \le 0}} Q_i^{(l)}\left(\{0\},t\right)\pi_{ik}^{(l)}, \tag{2.53}$$

dla $x_k > 0,\ t \in T_l$, mamy:

$$Q_k^{(l)}\left(\{0\},t\right) = 0.$$

Zależności te zostaną dalej wykorzystane, między innymi, do opisu działania rozważanego systemu w okresie T_l.

2.3. Bariera górna procesu opisującego poziom zapasów.

Teraz zostanie dokonana analiza pracy systemu w okresie T_l w przypadku, gdy poziom zapasów produktu spełnia następujący warunek:

$$z(t) = V.$$

Działanie systemu w tym wariancie dla $t \in T_l$ charakteryzują poniższe prawdopodobieństwa następującej postaci:

$$Q_k^{(l)}\left(\{V\},t\right) = P\left(z(t) = V,\quad x(t) = x_k\right). \tag{2.54}$$

Prawdopodobieństwa $Q_k^{(l)}\left(\{V\},t\right)$ spełniają związek (analogiczny do realizacji (2.36)-(2.38)):

$$\begin{aligned} &Q_k^{(l)}\left(\{V\},t+\tau\right)= \\ &=P\left(z\left(t+\tau\right)=V,\quad x\left(t+\tau\right)=x_k\right)= \\ &=\sum_i \int_0^V q_{ik}^{(l)}\left(z,\{V\};\tau,t\right)Q_i^{(l)}\left(\mathrm{d}z,t\right), \end{aligned} \tag{2.55}$$

dla $t\in T_l,\ t+\tau\in T_l$

gdzie prawdopodobieństwo warunkowe $q_{ik}^{(l)}$ wynosi:

$$\begin{aligned} &q_{ik}^{(l)}\left(z,\{V\};\tau,t\right)= \\ &=P\left(x\left(t\right)\text{ ma jeden skok w t+}\theta\in\left(\mathrm{t,t+}\tau\right)\right. \\ &\left.h\left(z+\theta x_i\right)+\left(\tau-\theta\right)x_k\geq V\mid x\left(t\right)=x_i\right)+o_1^{(l)}\left(\tau;i,k,t\right), \end{aligned} \tag{2.56}$$

gdy $i\neq k,\quad z=z\left(t\right)\in\left[0,V\right]$.

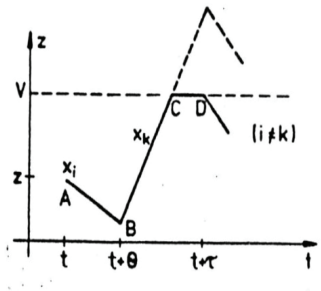
Zaś dla $i=k$ związek jest następujący:

$$\begin{aligned} &q_{kk}^{(l)}\left(z,\{V\};\tau,t\right)= \\ &=P\left(z+\tau x\left(t\right)\geq V,\quad x\left(s\right)=x_k\ \text{ dla } s\in\left(t,t+\tau\right)\mid x\left(t\right)=x_k\right)+o_1^{(l)}\left(\tau;k,t\right), \end{aligned} \tag{2.57}$$

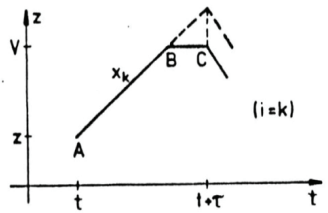
przy czym $z=z\left(t\right)\in\left[0,V\right]$.

Składniki $o_1^{(l)}\left(\tau;i,k,t\right)$, $o_1^{(l)}\left(\tau;k,t\right)$ występujące we wzorach (2.56), (2.57) spełniają warunek (2.10) (zob. wzory (2.37), (2.38)).

Ilustracja graficzna wzorów (2.56) i (2.57) jest analogiczna, jak w przypadku relacji (2.37) i (2.38). Przedstawiają to rysunki 14 i 15.



Rys. 14. Ilustracja graficzna relacji (2.56), $t\in T_l$, $t+\tau\in T_l$.



Rys. 15. Ilustracja graficzna relacji (2.57), $t\in T_l$, $t+\tau\in T_l$.

W następnym paragrafie zostaną wyprowadzone *explicite* wzory dla prawdopodobieństwa $q_{ik}^{(l)}$ określonych zależnościami (2.56), (2.57).

2.3.1. Prawdopodobieństwa warunkowe w przypadku bariery górnej.

Wykorzystując relacje (2.6), (2.56) otrzymujemy, co następuje:

$$q_{ik}^{(l)}\left(z,\{V\};\tau,t\right)-o_1^{(l)}\left(\tau;i,k,t\right)=\int_A \frac{\pi_{ik}^{(l)}}{\pi_i^{(l)}}\,\mathrm{d}\left(1-\exp\left(-\pi_i^{(l)}\theta\right)\right), \tag{2.58}$$

gdzie zbiór A określony jest następująco:

$$A=\left\{\theta:0<\theta<\tau,\quad h\left(z+\theta x_i\right)+\left(\tau-\theta\right)x_k\geq V\right\},$$

dla $i\neq k,\quad z=z\left(t\right)\in\left[0,V\right],\quad t\in T_l,\quad t+\tau\in T_l$.

Jeżeli $x_i>0$, $x_k>0$, τ małe, $0<\theta<\tau$, $t\in T_l$, $t+\tau\in T_l$, to wówczas zbiór:

$$\left\{\theta:h\left(z+\theta x_i\right)+\left(\tau-\theta\right)x_k\geq V\right\}=$$

$$=\left\{\theta:h\left(z+\theta x_i\right)+\left(\tau-\theta\right)x_k\geq V\right\}\cap$$

$$\cap\left\{\theta:z+\theta x_i<V\right\}\cup\left\{\theta:h\left(z+\theta x_i\right)+\left(\tau-\theta\right)x_k\geq V\right\}\cap\left\{\theta:z+\theta x_i\geq V\right\}=$$

jest równy w zależności od znaku różnicy x_i-x_k jak poniżej:

gdy $x_i-x_k>0$, to mamy: $\left\{\theta:\theta\geq\dfrac{V-z-\tau x_k}{x_i-x_k}\right\}\cap\left\{\theta:\theta<\dfrac{V-z}{x_i}\right\}\cup\left\{\theta:\theta\geq\dfrac{V-z}{x_i}\right\}$,

gdy $x_i-x_k<0$, to mamy: $\left\{\theta:\theta\leq\dfrac{V-z-\tau x_k}{x_i-x_k}\right\}\cap\left\{\theta:\theta<\dfrac{V-z}{x_i}\right\}\cup\left\{\theta:\theta\geq\dfrac{V-z}{x_i}\right\}$.

Zbiór ten jest równy, w zależności od różnych przypadków następująco:

gdy $x_i-x_k>0,\quad V-\tau x_k<z$, to mamy: $\left\{\theta:0<\theta<\tau\right\}$,

gdy $x_i-x_k>0,\quad V-\tau x_i<z<V-\tau x_k$, to mamy:

$$\left\{\theta:\frac{V-z-\tau x_k}{x_i-x_k}<\theta<\frac{V-z}{x_i}\right\}\cup\left\{\theta:\theta\geq\frac{V-z}{x_i}\right\},$$

gdy $x_i-x_k>0,\quad z$ pozostałe, to mamy: $\varnothing$,

gdy $x_i-x_k<0,\quad V-\tau x_k<z<V-\tau x_i$, to mamy: $\left\{\theta:\theta<\dfrac{V-z-\tau x_k}{x_i-x_k}\right\}\cup\left\{\theta:\theta\geq\dfrac{V-z}{x_i}\right\}$,

gdy $x_i-x_k<0,\quad V-\tau x_i<z$, to mamy: $\left\{\theta:0<\theta<\tau\right\}$,

gdy $x_i-x_k<0,\quad z$ pozostałe, to mamy: $\varnothing$.

Stąd i ze wzoru określającego zbiór A otrzymujemy różne postacie zbioru A w różnych przypadkach, jak poniżej:

dla $x_i-x_k>0,\ V-\tau x_k<z\leq V$ mamy: $A=\left\{\theta:0<\theta<\tau\right\}$,

dla $x_i-x_k>0,\ V-\tau x_i<z<V-\tau x_k$ mamy: $A=\left\{\theta:\dfrac{V-z-\tau x_k}{x_i-x_k}<\theta<\tau\right\}$,

dla $x_i-x_k>0,\ z$ pozostałe mamy: $A=\varnothing$,

dla $x_i-x_k<0,\ V-\tau x_k<z<V-\tau x_i$ mamy: $A=\left\{\theta:\theta<\dfrac{V-z-\tau x_k}{x_i-x_k}\right\}$,

dla $x_i - x_k < 0,\ V - \tau x_i < z \le V$ mamy: $A = \{\theta : 0 < \theta < \tau\}$,

dla $x_i - x_k < 0,\ z$ pozostałe mamy: $A = \varnothing$.

Zatem, biorąc pod uwagę relację (2.58), prawdopodobieństwa:

$$q_{ik}^{(l)}\left(z,\{V\};\tau,t\right) - o_1^{(l)}\left(\tau;i,k,t\right) \tag{2.59}$$

w zależności od różnych przypadków są równe, jak następuje:

gdy $x_i - x_k > 0,\ V - \tau x_i < z \le V - \tau x_k$, wtedy wynoszą:

$$\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau - \frac{V - z - \tau x_k}{x_i - x_k}\right) + o^{(l)}\left(\tau;V,i,k,z\right),$$

gdy $x_i - x_k > 0,\ V - \tau x_k < z \le V$, wtedy wynoszą: $\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}\left(\tau;i\right)$,

gdy $x_i - x_k > 0,\ z$ pozostałe, wtedy wynoszą: $\varnothing$,

gdy $x_i - x_k < 0,\ V - \tau x_k < z < V - \tau x_i$, wtedy wynoszą: $\pi_{ik}^{(l)}\dfrac{V - z - \tau x_k}{x_i - x_k} + o^{(l)}\left(\tau;V,i,k,z\right)$,

gdy $x_i - x_k < 0,\ V - \tau x_i < z \le V$, wtedy wynoszą: $\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}\left(\tau;i\right)$,

gdy $x_i - x_k < 0,\ z$ pozostałe, wtedy wynoszą: $\varnothing$.

Analogicznie można obliczyć prawdopodobieństwa q_{ik} w pozostałych przypadkach. Wyrażają się one następującymi wzorami w zależności od różnych poziomów x_i oraz x_k.

I tak dla $x_i < 0,\quad x_k > 0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{ik}^{(l)}\left(z,\{V\};\tau,t\right) - o_1^{(l)}\left(\tau;i,k,t\right) \tag{2.60}$$

może być równe, w zależności od z, jak poniżej:

gdy $V - \tau x_k < z \le V$, to wynosi ono: $\pi_{ik}^{(l)}\dfrac{V - z - \tau x_k}{x_i - x_k} + o^{(l)}\left(\tau;V,i,k,z\right)$,

gdy z pozostałe, to wynosi ono: 0.

W sytuacji $x_i = 0,\quad x_k > 0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{ik}^{(l)}\left(z,\{V\};\tau,t\right) - o_1^{(l)}\left(\tau;i,k,t\right) \tag{2.61}$$

może przyjąć następujące wartości w zależności od z:

gdy $V - \tau x_k < z \le V$, to wynosi ono: $\pi_{ik}^{(l)}\dfrac{z + \tau x_k - V}{x_k} + o^{(l)}\left(\tau;V,i,k,z\right)$,

gdy z pozostałe, to wynosi ono: 0.

Dalej dla $x_i \ge 0,\quad x_k = 0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{ik}^{(l)}\left(z,\{V\};\tau,t\right) - o_1^{(l)}\left(\tau;i,k,t\right) \tag{2.62}$$

może być równe, w zależności od z, jak następuje:

gdy $z = V$, to wynosi ono: $\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}\left(\tau;i\right)$,

gdy $0 \le z < V$, to wynosi ono: 0.

Z kolei dla $x_i < 0,\quad x_k = 0$ prawdopodobieństwo spełnia następujący warunek:

$$q_{ik}^{(l)}\left(z,\{V\};\tau,t\right) - o_1^{(l)}\left(\tau;i,k,t\right) = 0, \tag{2.63}$$

gdy $0 \le z \le V$.

Również dla $x_k < 0,\quad x_k$ - dowolny stan, to prawdopodobieństwo spełnia następujący warunek:

$$q_{ik}^{(l)}\left(z,\{V\};\tau,t\right) - o_1^{(l)}\left(\tau;i,k,t\right) = 0, \tag{2.64}$$

gdy $0 \le z \le V$.

Jeżeli $i = k, \quad t \in T_l, \quad t + \tau \in T_l$, to ze wzorów (2.5) i (2.57) wynika następująca równość dotycząca prawdopodobieństwa:

$$q_{kk}^{(l)}\left(z, \{V\}; \tau, t\right) - o_1^{(l)}\left(\tau; i, k, t\right), \tag{2.65}$$

która w zależności od różnych sytuacji może przyjmować różne wartości, jak następuje:

gdy $x_k < 0, \ 0 \le z \le V$, to przyjmuje ono wartość: 0 ,

gdy $V - \tau x_k \le z \le V, \ x_k \ge 0$, to przyjmuje ono wartość: $1 - \pi_k^{(l)}\pi + o^{(l)}\left(\tau; k\right)$,

zaś gdy z pozostałe, $x_k \ge 0$, to przyjmuje ono też wartość: 0 .

Człony $o^{(l)}\left(\tau; ...\right)$ występujące w zależnościach (2.59)-(2.65) są wielkościami nieskończenie małymi rzędu wyższego niż τ i w otoczeniu $\tau = 0$; spełniają zatem warunek (2.16).

Otrzymane równości (2.59)-(2.65) zostaną wykorzystane w następnym paragrafie do wyznaczenia równań różniczkowych, które spełniają prawdopodobieństwa $Q_k^{(l)}\left(\{V\}, t\right)$ opisujące funkcjonowanie badanego systemu w okresie T_l, w przypadku bariery górnej.

2.3.2. Bariera górna, a intensywności procesu sterującego poziomem zapasów.

W celu obliczenia następujących prawdopodobieństw:

$$Q_k^{(l)}\left(\{V\}, t\right)$$

(zob. wzór 2.54)) charakteryzujących działanie systemu w przypadku bariery górnej zostaną wyprowadzone równania, które spełniają funkcje $Q_k^{(l)}\left(\{V\}, t\right)$ dla $t \in T_l$.

Na podstawie wzoru (2.55) oraz relacji (2.59)-(2.61), dla $x_k > 0$, $t \in T_l$, $t + \tau \in T_l$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} Q_k^{(l)}\left(\{V\}, t + \tau\right) &= \sum_i \left\{ \int_0^V q_{ik}^{(l)}\left(z, \{V\}; \tau, t\right) f_i^{(l)}\left(z, t\right) \mathrm{d}z + \right. \\ &\left. + Q_i^{(l)}\left(\{0\}, t\right) q_{ik}^{(l)}\left(0, \{V\}; \tau, t\right) + Q_i^{(l)}\left(\{V\}, t\right) q_{ik}^{(l)}\left(V, \{V\}; \tau, t\right) \right\} = \\ &= A_{k,l}^{+} + A_{k,l}^{0} + A_{k,l}^{-}, \end{aligned} \tag{2.66}$$

gdzie poszczególne składniki $A_{k,l}^{+}$, $A_{k,l}^{0}$ oraz $A_{k,l}^{-}$ mają następującą postać:

składnik pierwszy $A_{k,l}^{+}$ wynosi:

$$A_{k,l}^{+}=\sum_{\substack{i\neq k\\ x_i>0}}\Bigg\{\int_0^V q_{ik}^{(l)}\left(z,\{V\};\tau,t\right)f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+$$

$$+Q_i^{(l)}\left(\{0\},t\right)q_{ik}^{(l)}\left(0,\{V\};\tau,t\right)+Q_i^{(l)}\left(\{V\},t\right)q_{ik}^{(l)}\left(V,\{V\};\tau,t\right)\Bigg\}=$$

$$=\sum_{\substack{i\neq k\\ x_i>x_k}}\Bigg\{\int_0^{V-\tau x_i}o^{(l)}f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+$$

$$+\int_{V-\tau x_i}^{V-\tau x_k}\left[\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau-\frac{V-z-\tau x_k}{x_i-x_k}\right)+o^{(l)}\left(\tau;z\right)\right]f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+$$

$$+\int_{V-\tau x_k}^{V}\left[\pi_{ik}^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)\right]f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+Q_i^{(l)}\left(\{0\},t\right)o^{(l)}\left(\tau\right)\Bigg\}+$$

$$+\sum_{\substack{i\neq k\\ x_i<x_k}}\Bigg\{\int_0^{V-\tau x_k}o^{(l)}\left(\tau\right)f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+\int_{V-\tau x_k}^{V-\tau x_i}\left[\pi_{ik}^{(l)}\frac{V-z-\tau x_k}{x_i-x_k}+o^{(l)}\left(\tau;z\right)\right]f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+$$

$$+\int_{V-\tau x_i}^{V}\left[\pi_{ik}^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)\right]f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+Q_i^{(l)}\left(\{0\},t\right)o^{(l)}\left(\tau\right)+$$

$$+Q_i^{(l)}\left(\{V\},t\right)\left[\pi_{ik}^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)\right]\Bigg\},$$

(2.67)

składnik drugi $A_{k,l}^{0}$ wynosi:

$$A_{k,l}^{0}=Q_k^{(l)}\left(\{0\},t\right)q_{kk}^{(l)}\left(0,\{V\};\tau,t\right)+Q_k^{(l)}\left(\{V\},t\right)q_{kk}^{(l)}\left(V,\{V\};\tau,t\right)+$$

$$+\int_0^V q_{kk}^{(l)}\left(z,\{V\};\tau,t\right)f_k^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z=$$

$$=Q_k^{(l)}\left(\{0\},t\right)o^{(l)}\left(\tau\right)+Q_k^{(l)}\left(\{V\},t\right)\left[1-\pi_k^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)\right]+$$

$$+\int_0^{V-\tau x_k}o^{(l)}\left(\tau\right)f_k^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+\int_{V-\tau x_k}^{V}\left[\pi_{ik}^{(l)}\frac{V-z-\tau x_k}{x_i-x_k}+o^{(l)}\left(\tau\right)\right]f_k^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z,$$

(2.68)

trzeci zaś składnik $A_{k,l}^{-}$ wynosi:

$$A_{k,l}^{-}=\sum_{\substack{i\neq k\\ x_i\leq 0}}\Bigg\{\int_0^{V-\tau x_k}o^{(l)}\left(\tau\right)f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+$$

$$+\int_{V-\tau x_k}^{V}\left[\pi_{ik}^{(l)}\frac{V-z-\tau x_k}{x_i-x_k}+o^{(l)}\left(\tau;z\right)\right]f_i^{(l)}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+Q_i^{(l)}\left(\{0\},t\right)o^{(l)}\left(\tau\right)+$$

$$+Q_i^{(l)}\left(\{V\},t\right)\left[\pi_{ik}^{(l)}\frac{\tau x_k}{x_k-x_i}+o^{(l)}\left(\tau;V\right)\right]\Bigg\}.$$

(2.69)

Uwzględniając relacje (2.67)-(2.69) przenieśmy prawdopodobieństwo $Q_k^{(l)}\left(\{V\},t\right)$ na lewą stronę wzoru (2.66). Następnie, po obustronnym podzieleniu otrzymanej równości przez τ i przejściu do granicy: $\tau\to 0$, otrzymujemy następującą równość:

$$\frac{\partial Q_k^{(l)}\left(\{V\},t\right)}{\partial t} = -\pi_k^{(l)} Q_k^{(l)}\left(\{V\},t\right) + x_k f_k^{(l)}\left(V,t\right) + \\ + \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i \geq 0}} Q_i^{(l)}\left(\{V\},t\right)\pi_{ik}^{(l)} + \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i < 0}} \frac{x_k}{x_k - x_i} Q_i^{(l)}\left(\{V\},t\right)\pi_{ik}^{(l)}. \tag{2.70}$$

Wzór (2.70) dla $x_k = 0$ otrzymuje się analogicznie.

Z własności procesu $x(t)$ i określenia procesu $z(t)$ wynika, że:

$$Q_i^{(l)}\left(\{V\},t\right) = 0 \text{ dla } x_i < 0. \tag{2.71}$$

Po uwzględnieniu zależności (2.71) relacja (2.70) przyjmuje prostszą postać, która w zależności od wartości x_k jest poniżej zaprezentowana.

Prawdopodobieństwa $Q_k^{(l)}\left(\{V\},t\right)$ spełniają zatem następujący układ równań

dla $x_k \geq 0,\ t \in T_l$ mamy:

$$\frac{\partial Q_k^{(l)}\left(\{V\},t\right)}{\partial t} = -\pi_k^{(l)} Q_k^{(l)}\left(\{V\},t\right) + x_k f_k^{(l)}\left(V,t\right) + \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i \geq 0}} Q_i^{(l)}\left(\{V\},t\right)\pi_{ik}^{(l)}, \tag{2.72}$$

dla $x_k < 0,\ t \in T_l$ mamy:

$$Q_k^{(l)}\left(\{V\},t\right) = 0.$$

Zależności te zostaną wykorzystane, między innymi, do opisu funkcjonowania badanego systemu w okresie T_l ($l = 1,2,\ldots,m$).

3. Probabilistyczny opis funkcjonowania systemu logistycznego *S*(*za*).

Wyniki przedstawione w paragrafach 2.1, 2.2 i 2.3 zostaną teraz zastosowane do uzyskania stochastycznego opisu działania badanego systemu logistycznego (zob. rys. 4) w przypadku, gdy wejście $w(t)$ podsystemu *M* jest procesem zagregowanym.

Funkcjonowanie rozważanego systemu w okresie T_l $(l = 1,2,...,m)$ opisuje następujący układ równań różniczkowych odpowiednio dla:

- stanu pośredniego, czyli dla $0 < z < V,\ t \in T_l,\ k = 1,2,...,n$ mamy (zob. wzór (2.34)):

$$\frac{\partial f_k^{(l)}\left(z,t\right)}{\partial t} = \\ = -\pi_k^{(l)} f_k^{(l)}\left(z,t\right) - x_k \frac{\partial f_k^{(l)}\left(z,t\right)}{\partial z} + \sum_{i\neq k} f_k^{(l)}\left(z,t\right)\pi_{ik}^{(l)}, \tag{3.1}$$

- bariery dolnej, czyli dla $x_k \leq 0,\ t \in T_l$ jest (zob. wzór (2.53)):

$$\frac{\partial Q_k^{(l)}\left(\{0\},t\right)}{\partial t} = \\ = -\pi_k^{(l)} Q_k^{(l)}\left(\{0\},t\right) - x_k f_k^{(l)}\left(0,t\right) + \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i \leq 0}} Q_k^{(l)}\left(\{0\},t\right)\pi_{ik}^{(l)} m \tag{3.2}$$

przy czym dla $x_k > 0,\ t \in T_l$ mamy:

$$Q_k^{(l)}\left(\{0\},t\right) = 0; \tag{3.3}$$

- bariery górnej, czyli dla $x_k \geq 0,\ t \in T_l$ mamy (zob. wzór (2.72)):

$$\frac{\partial Q_k^{(l)}\left(\{V\},t\right)}{\partial t} = \\ = -\pi_k^{(l)} Q_k^{(l)}\left(\{V\},t\right) + x_k f_k^{(l)}\left(V,t\right) + \sum_{\substack{i \neq k \\ x_i \geq 0}} Q_i^{(l)}\left(\{V\},t\right)\pi_{ik}^{(l)}, \tag{3.4}$$

przy czym dla $x_k < 0,\ t \in T_l$ jest:

$$Q_k^{(l)}\left(\{V\},t\right) = 0. \tag{3.5}$$

Układ równań (3.1)-(3.5) przedstawia matematyczny model badanego systemu w przypadku zagregowane wejścia $w(t)$ do podsystemu *M*.

W praktyce ważne są również prostsze warianty tego modelu.
Oto one:

1) Intensywności procesu wejścia podsystemu *M* są stałe:

$$\pi_{ik}^{(l)} = \pi_{ik}..$$

Wówczas funkcje:

$$f_k^{(l)}\left(z,t\right) = f_k\left(z,t\right),$$
$$Q_k^{(l)}\left(\{0\},t\right) = Q_k\left(\{0\},t\right),$$
$$Q_k^{(l)}\left(\{V\},t\right) = Q_k\left(\{V\},t\right)$$

zależą od czasu w okresie $T_1 \cup T_2 \cup \ldots T_m$.

2) Intensywności $\pi_{ik}^{(l)}$ procesu wejścia podsystemu *M* zależą od okresu T_l. Wówczas funkcje:

$$f_k^{(l)}\left(z,t\right) = f_k^{(l)}\left(z\right),$$
$$Q_k^{(l)}\left(\{0\},t\right) = Q_k^{(l)}\left(\{0\}\right),$$
$$Q_k^{(l)}\left(\{V\},t\right) = Q_k^{(l)}\left(\{V\}\right)$$

nie zależą od czasu w okresie T_l.

3) Intensywności procesu wejścia podsystemu *M* są stałe:

$$\pi_{ik}^{(l)} = \pi_{ik}$$

oraz funkcje prawdopodobieństwa:

$$f_k^{(l)}\left(z,t\right) = f_k\left(z\right),$$
$$Q_k^{(l)}\left(\{0\},t\right) = Q_k\left(\{0\}\right),$$
$$Q_k^{(l)}\left(\{V\},t\right) = Q_k\left(\{V\}\right)$$

nie zależą od czasu w okresie $T_1 \cup T_2 \cup \ldots T_m$.

Model (3.1)-(3.5) dla wariantu pierwszego 1) przyjmuje postać następującą:

- w przypadku stanu pośredniego, czyli dla $0 < z < V,\ k = 1,2,...,n$ mamy:

$$\frac{\partial f_k\left(z,t\right)}{\partial t} = -\pi_k f_k\left(z,t\right) - x_k \frac{\partial f_k\left(z,t\right)}{\partial z} + \sum_{i \neq k} f_i\left(z,t\right)\pi_{ik}, \tag{3.6}$$

- w przypadku bariery dolnej, czyli dla $x_k \leq 0$ jest:

$$\frac{\partial Q_k\left(\{0\},t\right)}{\partial t} = -\pi_k Q_k\left(\{0\},t\right) - x_k f_k\left(0,t\right) + \sum_{\substack{i \neq k \\ x_i \leq 0}} Q_i\left(\{0\},t\right)\pi_{ik}, \tag{3.7}$$

przy czym dla $x_k > 0$ jest: $Q_k\left(\{0\},t\right) = 0,$ (3.8)

- w przypadku bariery górnej, czyli dla $x_k \geq 0$ mamy:

$$\frac{\partial Q_k\left(\{V\},t\right)}{\partial t} = -\pi_k Q_k\left(\{V\},t\right) - x_k f_k\left(V,t\right) + \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i \geq 0}} Q_i\left(\{V\},t\right)\pi_{ik}, \tag{3.9}$$

przy czym dla $x_k < 0$ jest: $Q_k\left(\{V\},t\right) = 0.$ (3.10)

Dla wariantu drugiego 2) model (3.1)-(3.5) ma następującą postać:

- w przypadku stanu pośredniego, czyli dla $0 < z < V$, $k = 1,2,...,n$ mamy:

$$x_k \frac{\mathrm{d}f_k^{(l)}\left(z\right)}{\mathrm{d}z} = -\pi_k^{(l)} f_k^{(l)}\left(z\right) + \sum_{i\neq k} f_i^{(l)}\left(z\right)\pi_{ik}^{(l)}; \tag{3.11}$$

- w przypadku bariery dolnej, czyli dla $x_k \leq 0$ mamy:

$$\pi_k^{(l)} Q_k^{(l)}\left(\{0\}\right) = -x_k f_k^{(l)}\left(0\right) + \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i \leq 0}} Q_i^{(l)}\left(\{0\}\right)\pi_{ik}^{(l)}, \tag{3.12}$$

przy czym dla $x_k > 0$ jest: $Q_k^{(l)}\left(\{0\}\right) = 0;$ (3.13)

- w przypadku bariery górnej, czyli dla $x_k \geq 0$ mamy:

$$\pi_k^{(l)} Q_k^{(l)}\left(\{V\}\right) = x_k f_k^{(l)}\left(V\right) + \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i \geq 0}} Q_i^{(l)}\left(\{V\}\right)\pi_{ik}^{(l)}, \tag{3.14}$$

przy czym dla $x_k < 0,\ l = 1,2,...,m$ jest: $Q_k^{(l)}\left(\{V\}\right) = 0.$ (3.15)

Układ równań (3.1)-(3.5) w przypadku trzecim 3) przybiera następującą postać uproszczoną:

- w przypadku stanu pośredniego, czyli dla $k = 1,2,...,n$ mamy:

$$x_k \frac{\mathrm{d}f_k\left(z\right)}{\mathrm{d}z} = -\pi_k f_k\left(z\right) + \sum_{i\neq k} f_i\left(z\right)\pi_{ik}; \tag{3.16}$$

- w przypadku bariery dolnej, czyli dla $x_k \leq 0$ mamy:

$$\pi_k Q_k\left(\{0\}\right) = -x_k f_k\left(0\right) + \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i \geq 0}} Q_i\left(\{V\}\right)\pi_{ik}, \tag{3.17}$$

przy czym dla $x_k > 0$ jest: $Q_k\left(\{0\}\right) = 0;$ (3.18)

- w przypadku bariery górnej, czyli dla $x_k \geq 0$ mamy:

$$\pi_k Q_k\left(\{V\}\right) = x_k f_k\left(V\right) + \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i \geq 0}} Q_i\left(\{V\}\right)\pi_{ik}^{(l)}, \tag{3.19}$$

przy czym dla $x_k < 0$ jest: $Q_k\left(\{V\}\right) = 0.$ (3.20)

Równania (3.16)-(3.20) rozpatrujemy łącznie z następującymi równaniami zupełności prawdopodobieństwa postaci:

$$Q_k\left(\{0\}\right) + Q_k\left(V\right) + Q_k\left(\{V\}\right) = p_k, \quad k = 1,2,...,n, \tag{3.21}$$

gdzie $p_k = P\left(x\left(t\right) = x_k\right)$ (wariant stacjonarny).

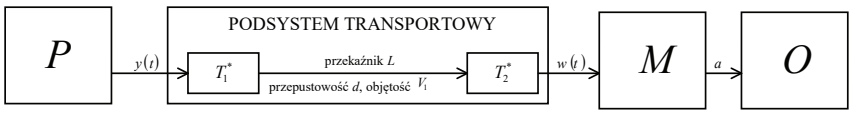
Oczywiście zachodzi własność:

$$\sum_k p_k = 1 \tag{3.22}$$

Matematyczny opis działania badanego systemu logistycznego w przypadku zagregowanego wejścia $w(t)$, wyrażony relacjami (3.1)-(3.21), można zastosować w procesie decyzyjnym w celu zwiększenia efektywności funkcjonowania tego systemu wspomagającego centrum usług.

4. Ilościowe charakterystyki wąskiego gardła i inne wielkości opisujące działanie systemu *S*(*za*).

Rozpatrzmy system logistyczny przedstawiony na rys. 8, w którym wielkość produkcji $y(t)$ przesyłana jest od podsystemu *P* do podsystemu *M* i dalej do odbiorcy *O* w sposób ciągły np. za pomocą podsystemu transportowego *T*, np. taśmociągów współpracujących ze sobą szeregowo, co przedstawia rys. 16.



Rys. 16. Struktura podsystemu transportowego.

Produkt $y(t)$ przekazywany jest z danego taśmociągu T_1^* na taśmociąg następny T_2^* za pomocą tzw. przekaźnika *L* o przepustowości *d* i objętości V_1 (zob. [13]-[16]). Przekaźnik ten, oprócz kierowania strumienia produktu z taśmociągu T_1^* na taśmociąg T_2^*, z uwagi na swoją objętość, amortyzuje nieregularność wartości przekazywanego produktu $y(t)$ ograniczając w ten sposób możliwość powstania tzw. „wąskiego gardła".

Jeżeli zawartość przekaźnika *L* jest równa jego objętości V_1 oraz poziom produktu $y(t)$ przekracza przepustowość *d* tego przekaźnika, to takie zdarzenie losowe nazywać będziemy „wąskim gardłem".

Wystąpienie wąskiego gardła przez pewien okres czasu spowoduje zablokowanie funkcjonowania taśmociągów T_1^* i T_2^*, a zatem także unieruchomienie całego podsystemu transportowego *T* współpracującego bezpośrednio z podsystemami *P* i *M* oraz w konsekwencji z odbiorcą *O*.

Z prac [13]-[19] wynika, że matematyczny model funkcjonowania przekaźnika *L* ma postać

$$(y_k - \mathrm{d})\frac{\mathrm{d}f_k z}{\mathrm{d}z} = -\pi_k f_k(z) + \sum_{i \neq k} f_i(z)\pi_{ik}, \tag{4.1}$$

dla $k = 1, 2, \ldots, n$.

Przepustowość *d* przekaźnika *L* determinuje wielkość strumienia produktu w sposób następujący:

dla $y_k \leq \mathrm{d}$ jest spełniona poniższa równość:

$$\pi_k Q_k(\{0\}) = (\mathrm{d} - y_k) f_k(0) + \sum_{\substack{i \neq k \\ y_i \leq d}} Q_i(\{0\})\pi_{ik}, \tag{4.2}$$

przy czym dla $y_k > \mathrm{d}$ mamy: $Q_k(\{0\}) = 0,$ (4.3)

zaś dla $y_k \geq \mathrm{d}$ jest spełniona następująca równość:

$$\pi_k Q_k\left(\{V_1\}\right) = \left(y_k - \mathrm{d}\right) f_k\left(V_1\right) + \sum_{\substack{i \neq k \\ y_i \geq d}} Q_i\left(\{V_1\}\right) \pi_{ik}, \tag{4.4}$$

przy czym dla $y_k < \mathrm{d}$ mamy: $Q_k\left(\{V_1\}\right) = 0.$ (4.5)

W modelu (4.1)-(4.5) występują takie same oznaczenia, jak używane do tej pory w poprzednich rozdziałach: 1-3, jednak sens ich jest inny i wynika z faktu, że proces $z(t)$ przedstawia w tym przypadku chwilową zawartość przekaźnika L o przepustowości d i objętości V_1. Warto zauważyć, że model (4.1)-(4.5) odpowiada modelowi (3.16)-(3.20).

Rozwiązując układ równań (4.1)-(4.5) można wyznaczyć następujące wielkości:

- średnia ilość m produktu wydostająca się na zewnątrz, to:

$$m = \sum_{y_k > d} \left(y_k - \mathrm{d}\right) Q_k\left(\{V_1\}\right), \tag{4.6}$$

- prawdopodobieństwo q_1 wystąpienia „wąskiego gardła", to:

$$q_1 = \sum_{y_k > d} Q_k\left(\{V_1\}\right), \tag{4.7}$$

- prawdopodobieństwo q_2 częściowego wypełnienia przekaźnika *L*, to:

$$q_2 = \sum_{k} Q_k\left(V_1\right), \tag{4.8}$$

- prawdopodobieństwo q_3 sytuacji braku wypełnienia przekaźnika *L*, to:

$$q_3 = \sum_{y_k \leq d} Q_k\left(\{0\}\right), \tag{4.9}$$

- prawdopodobieństwo q_4 sytuacji całkowitego wypełnienia przekaźnika *L*, to:

$$q_4 = \sum_{y_k \geq d} Q_k\left(\{V_1\}\right). \tag{4.10}$$

Wzór (4.6) określa średnią ilość produktu, który na skutek zaistnienia wąskiego gardła wydostał się na zewnątrz przekaźnika *L*, na jednostkę czasu. Informacja ta ma ważne znaczenie praktyczne, ponieważ w przypadku, gdy ilość ta jest zbyt duża, wówczas wystąpi zablokowanie podsystemu transportowego *T* i w konsekwencji – wstrzymanie dostaw do magazynu *M* i do odbiorcy *O*. Jeżeli w tym czasie brak jest produktu w magazynie *M*, to nastąpi sytuacja niekorzystna dla odbiorcy *O*, który zmuszony będzie wstrzymać lub ograniczyć własną działalność.

Związki (4.7)-(4.10) wyrażają kolejno:

- prawdopodobieństwo (4.7) oznacza wystąpienia „wąskiego gardła" w rozważanym systemie. Konsekwencją tego zdarzenia może być zablokowanie działania podsystemu transportowego *T* ze wszystkimi konsekwencjami tej blokady włącznie;
- prawdopodobieństwa (4.8), (4.9) i (4.10), oznaczają że element *L* będzie częściowo wypełniony, pusty lub całkowicie wypełniony.

Charakterystyki następujące

- m, q_1 (wielkości opisujące „wąskie gardło"),

oraz

- q_2, q_3, q_4 (opisujące funkcjonowania przekaźnika L)

zależą od wielkości: π_{ik}, y_l opisujących parametry podsystemu *P* i *T*

oraz od V_1, d opisujących parametry przekaźnika L.

Zatem charakterystyki m, q_i ($i = 1,2,3,4$) są pewnymi funkcjami zależnymi od parametrów π_{ik}, y_l, V_1, d, czyli mamy następujące zależności:

$$m = h_0\left(\pi_{ik}, y_l, V_1, \mathrm{d}\right),$$
$$q_j = h_j\left(\pi_{ik}, y_l, V_1, \mathrm{d}\right), \quad \text{dla} \quad j = 1,2,3,4. \tag{4.11}$$

Można więc optymalizować wielkości podanych charakterystyk h_0, h_1, h_2, h_3, h_4 poprzez odpowiednie zmiany wartości tych parametrów. Intensywności przejścia π_{ik} zależą m.in. od takich elementów organizacyjnych, jak: sprawność ekip naprawczych, szybkość dostępu do części zamiennych, sprawność przekazywania produktu y_k do podsystemu T, poziom konserwacji urządzeń systemu $S(za)$, właściwe planowanie remontów itp.

Usprawniając zatem czynniki organizacyjne można wpływać na wielkości intensywności π_{ik}, a tym samym – za pomocą wzorów (4.6), (4.7) określać wartość charakterystyk opisujących „wąskie gardło" i ogólnie – wpływać na wartość charakterystyk funkcjonowania przekaźnika L.

Opis „wąskiego gardła" oraz pracy przekaźnika L będzie przedstawiony na, ważnym w praktyce, przykładzie dwustanowego procesu sterującego $y(t)$ (zob. [19]). Podane będą więc konkretne postacie funkcji (4.11) w rozważanym wariancie.

Niech zatem np. $y_1 > \mathrm{d}$, $y_2 < \mathrm{d}$.

Równania (4.1)-(4.5) przyjmują wtedy następującą postać:

$$\left(y_1 - \mathrm{d}\right)\frac{\mathrm{d}f_1(z)}{\mathrm{d}z} = -\pi_1 f_1(z) + \pi_2 f_2(z),$$
$$\left(y_2 - \mathrm{d}\right)\frac{\mathrm{d}f_2(z)}{\mathrm{d}z} = -\pi_1 f_1(z) - \pi_2 f_2(z), \tag{4.12}$$

gdzie spełnione są następujące warunki:

$$\pi_1 = \pi_{12}, \quad \pi_2 = \pi_{21},$$
$$Q_1\left(\{0\}\right) = 0, \tag{4.13}$$
$$\pi_2 Q_2\left(\{0\}\right) = \left(\mathrm{d} - y_2\right) f_2(0), \tag{4.14}$$
$$Q_2\left(\{V_1\}\right) = 0, \tag{4.15}$$
$$\pi_1 Q_1\left(\{V_1\}\right) = \left(y_1 - \mathrm{d}\right) f_1(V_1). \tag{4.16}$$

Rozwiązaniem ogólnym układu równań różniczkowych (4.12) są następujące funkcje:

$$f_1(z) = \frac{c_1\pi_{21}}{d_1} + c_2 \exp(-bz), \tag{4.17}$$

$$f_2(z) = \frac{c_1\pi_{12}}{d_1} + c_2\frac{\mathrm{d} - y_1}{y_2 - \mathrm{d}}\exp(-bz), \tag{4.18}$$

$$d_1 = \pi_{21}\left(y_1 - \mathrm{d}\right) + \pi_{12}\left(y_2 - \mathrm{d}\right),$$

zaś stałe b, c_1, c_2 są następującej postaci:

$$b = \frac{\pi_{21}}{y_2 - \mathrm{d}} + \frac{\pi_{12}}{y_1 - \mathrm{d}} \neq 0, \tag{4.19}$$
$$c_1 \text{ i } c_2 \text{ - dowolne stałe.}$$

Równania zupełności prawdopodobieństwa przyjmują tu poniższą postać:

$$\begin{aligned}\int_0^{V_1} f_1(z)\,\mathrm{d}z + Q_1\left(\{V_1\}\right) &= \frac{\pi_{21}}{\pi_{21}+\pi_{12}},\\ \int_0^{V_1} f_2(z)\,\mathrm{d}z + Q_2\left(\{0\}\right) &= \frac{\pi_{12}}{\pi_{21}+\pi_{12}}.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Rozwiązując układ równań (4.20), (4.14), (4.16) i uwzględniając przy tym wzory (4.17), (4.18) otrzymujemy, co następuje:

$$c_1 = 0,$$

$$c_2 = \frac{\pi_{12} b}{\left(\pi_{12}+\pi_{21}\right)\mathrm{d}_2\left(V_1\right)}, \tag{4.21}$$

$$Q_2\left(\{0\}\right) = \frac{\left(y_1-\mathrm{d}\right)b\exp\left(-bV_1\right)}{\left(\pi_{12}+\pi_{21}\right)\left(\pi_{12}\dfrac{y_2-\mathrm{d}}{\mathrm{d}-y_1}-\pi_{21}\exp\left(-bV_1\right)\right)}, \tag{4.22}$$

$$Q_1\left(\{V_1\}\right) = \frac{\left(y_1-\mathrm{d}\right)b\exp\left(-bV_1\right)}{\left(\pi_{12}+\pi_{21}\right)\mathrm{d}_2\left(V_1\right)}, \tag{4.23}$$

gdy d_2 jest określone następująco:

$$\mathrm{d}_2\left(V_1\right) = \frac{\pi_{12}}{\pi_{21}} = \frac{y_1-\mathrm{d}}{y_2-\mathrm{d}}\exp\left(-bV_1\right) \neq 0. \tag{4.24}$$

Charakterystyki „wąskiego gardła" systemu $S(za)$ opisane zależnościami (4.6), (4.7) oraz pozostałe charakterystyki (wzory (4.8)-(4.10)), po uwzględnieniu relacji (4.21)-(4.23), przyjmują kolejno następujące postacie:

- wzór (4.6) ma następującą postać:

$$m = h_0\left(\pi_{12},\pi_{21},y_1,y_2,\mathrm{d},V_1\right) = \frac{\left(y_1-\mathrm{d}\right)^2 b\exp\left(-bV_1\right)}{\left(\pi_{12}+\pi_{21}\right)\mathrm{d}_2\left(V_1\right)}, \tag{4.25}$$

- wzór (4.7) ma następującą postać:

$$q_1 = h_1\left(\pi_{12},\pi_{21},y_1,y_2,\mathrm{d},V_1\right) = \frac{\left(y_1-\mathrm{d}\right)b\exp\left(-bV_1\right)}{\left(\pi_{12}+\pi_{21}\right)\mathrm{d}_2\left(V_1\right)}, \tag{4.26}$$

- wzór (4.8) ma następującą postać:

$$q_2 = h_2\left(\pi_{12},\pi_{21},y_1,y_2,\mathrm{d},V_1\right) = \frac{\dfrac{y_2-y_1}{y_2-\mathrm{d}}\pi_{12}\left(1-\exp\left(-bV_1\right)\right)}{\left(\pi_{12}+\pi_{21}\right)\mathrm{d}_2\left(V_1\right)}, \tag{4.27}$$

- wzór (4.9) ma następującą postać:

$$q_3 = h_3\left(\pi_{12},\pi_{21},y_1,y_2,\mathrm{d},V_1\right) = \frac{\pi_{12} b\left(\mathrm{d}-y_2\right)}{\left(\pi_{12}+\pi_{21}\right)\left(\pi_{12}\dfrac{y_2-\mathrm{d}}{\mathrm{d}-y_1}+\pi_{21}\exp\left(-bV_1\right)\right)}, \tag{4.28}$$

- wzór (4.10) ma następującą postać:

$$q_4 = h_4\left(\pi_{12},\pi_{21},y_1,y_2,\mathrm{d},V_1\right) = q_1. \tag{4.29}$$

Rozpatrzony teraz będzie przypadek $b = 0$, a więc gdy spełniona jest poniższa relacja:

$$\frac{\mathrm{d}-y_2}{y_1-\mathrm{d}} = \frac{\pi_{21}}{\pi_{12}}. \tag{4.30}$$

Wówczas rozwiązanie ogólne układu równań różniczkowych (4.12), przy uwzględnieniu warunku (4.30), ma postać następującą:

$$f_1(z)=\left(\frac{1}{y_1-\mathrm{d}}-\frac{\pi_{12}z}{(y_1-\mathrm{d})^2}\right)C_1+\frac{\mathrm{d}-y_2}{y_1-\mathrm{d}}C_2, \tag{4.31}$$

$$f_2(z)=\frac{\pi_{12}z}{(y_1-\mathrm{d})(y_2-\mathrm{d})}C_1+C_2, \tag{4.32}$$

gdzie C_1, C_2 - dowolne stałe.

W wyniku rozwiązania układu równań (4.20), (4.14), (4.16), z uwzględnieniem wzorów (4.17), (4.18), otrzymujemy co następuje:

$$c_1=0,$$

$$c_2=\frac{\pi_{12}}{(\pi_{12}+\pi_{21})\mathrm{d}_3(V_1)}, \tag{4.33}$$

$$Q_2(\{0\})=\frac{(\mathrm{d}-y_2)\pi_{12}}{(\pi_{12}+\pi_{21})\mathrm{d}_3(V_1)\pi_{21}}, \tag{4.34}$$

$$Q_1(\{V_1\})=\frac{\mathrm{d}-y_2}{(\pi_{12}+\pi_{21})\mathrm{d}_3(V_1)\pi_{21}}, \tag{4.35}$$

$$\mathrm{d}_3(V_1)=\frac{\mathrm{d}-y_2}{\pi_{21}}+V_1.$$

Dla $b=0$ (zob. (4.30)) warunek (4.24) jest spełniony. W rozważanym przypadku charakterystyka „wąskiego gardła" i elementu L przyjmują kolejno następujące postacie:

- wzór (4.6) ma następującą postać:

$$m=h_0(\pi_{12},\pi_{21},y_1,y_2,\mathrm{d},V_1)=\frac{(y_1-\mathrm{d})(\mathrm{d}-y_2)}{\mathrm{d}_3(V_1)(\pi_{12}+\pi_{21})}, \tag{4.36}$$

- wzór (4.7) ma następującą postać:

$$q_1=h_1(\pi_{12},\pi_{21},y_1,y_2,\mathrm{d},V_1)=\frac{\mathrm{d}-y_2}{\mathrm{d}_3(V_1)(\pi_{12}+\pi_{21})}, \tag{4.37}$$

- wzór (4.8) ma następującą postać:

$$q_2=h_2(\pi_{12},\pi_{21},y_1,y_2,\mathrm{d},V_1)=\frac{V_1(y_1-y_2)\pi_{12}}{\mathrm{d}_3(V_1)(\pi_{12}+\pi_{21})(y_1-\mathrm{d})}, \tag{4.38}$$

- wzór (4.9) ma następującą postać:

$$q_3=h_3(\pi_{12},\pi_{21},y_1,y_2,\mathrm{d},V_1)=\frac{(\mathrm{d}-y_2)\pi_{12}}{\pi_{21}\mathrm{d}_3(V_1)(\pi_{12}+\pi_{21})}, \tag{4.39}$$

- wzór (4.10) ma następującą postać:

$$q_4=h_4(\pi_{12},\pi_{21},y_1,y_2,\mathrm{d},V_1)=q_1. \tag{4.40}$$

Przejdźmy teraz do analizy otrzymanych charakterystyk „wąskiego gardła" dla przypadków granicznych, czyli dla:

$$V_1\to 0 \quad \text{oraz} \quad V_1\to\infty.$$

Ze wzorów (4.25) i (4.36) wynika, że:

$$\lim_{V_1\to 0} m(V_1)=\frac{(y_1-\mathrm{d})\pi_{21}}{\pi_{12}+\pi_{21}}=(y_1-\mathrm{d})p_1, \tag{4.41}$$

gdzie p_1 jest prawdopodobieństwem wystąpienia stanu y_1 procesu sterującego $y(t)$.

Związek (4.41) podaje średnią ilość produktu, który na skutek zaistnienia „wąskiego gardła" wydostałby się na zewnątrz przekaźnika L, na jednostkę czasu, gdyby element L miał objętość V_1 równą zero.

Ponieważ zachodzi następująca nierówność:

$$m(V_1) < (y_1 - \mathrm{d})\, p_1, \text{ gdy } V_1 > 0,$$

zatem zainstalowanie przekaźnika L zmniejsza średnią ilość produktu, który na skutek zaistnienia „wąskiego gardła" wydostałby się na zewnątrz przekaźnika L, na jednostkę czasu.

Korzystając z (4.36) i (4.25) otrzymujemy w zależności od znaku współczynnika b, co następuje:

dla $b \geq 0$ jest spełniony poniższy warunek:

$$\lim_{V_1 \to 0} m(V_1) = 0, \tag{4.42}$$

zaś dla $b < 0$ mamy następującą równość:

$$\lim_{V_1 \to 0} m(V_1) = \frac{b(y_1 - \mathrm{d})(y_2 - \mathrm{d})}{\pi_{12} + \pi_{21}}.$$

Ze wzoru (4.42) wynika, że dla $b < 0$ nawet największa objętość V_1 przekaźnika L nie zagwarantuje, aby średnia ilość produktu, który na skutek wystąpienia „wąskiego gardła" wydostanie się na zewnątrz przekaźnika L, na jednostkę czasu, była mniejsza niż wartość następująca:

$$\frac{b(y_1 - \mathrm{d})(y_2 - \mathrm{d})}{\pi_{12} + \pi_{21}}.$$

Przechodząc we wzorach (4.26) i (4.38) do granicy przy $V_1 \to 0$ otrzymujemy następującą wielkość:

$$\lim_{V_1 \to 0} q_1(V_1) = \frac{\pi_{12}}{\pi_{12} + \pi_{21}}. \tag{4.43}$$

Prawa strona wzoru (4.43) wyraża prawdopodobieństwo wystąpienia „wąskiego gardła" w badanym systemie, gdy element L ma objętość V_1 równą zero.

Ponieważ zachodzą następujące nierówności:

$$q_1(V_1) < \frac{\pi_{12}}{\pi_{12} + \pi_{21}}, \text{ gdy } V_1 > 0,$$

więc element L zawsze zmniejsza prawdopodobieństwo wystąpienia „wąskiego gardła".

Przechodząc teraz we wzorach (4.26) i (4.37) do granicy przy $V_1 \to \infty$, otrzymujemy w zależności od znaku współczynnika b, co następuje:

dla $b \geq 0$ jest prawdziwa następująca równość: $\lim_{V_1 \to \infty} q_1(V_1) = 0,$

zaś dla $b < 0$ mamy następującą równość: $\lim_{V_1 \to \infty} q_1(V_1) = \frac{b(y_2 - \mathrm{d})}{\pi_{12} + \pi_{21}}.$

Probabilistyczny opis funkcjonowania badanego systemu logistycznego, wspomagającego centrum usług (rozdziały 2, 3), umożliwia zbudowanie – oprócz podanych ilościowych charakterystyk „wąskiego gardła" – również innych wielkości, które mogą być wykorzystane zarówno w procesie efektywnego kierowania tym systemem, jak i w fazie projektowania tego systemu.

Jeżeli w okresie T_m wystąpi zdarzenie losowe W_1 postaci: wielkość produktu $y(t)$ dostarczonego przez podsystem produkcji *P*, jako nadawcy, do odbiorcy *O*, jest mniejsza od zapotrzebowania a odbiorcy *O* (zob. rys. 8), którego praca ma charakter ciągły

(np. wytwarzanie energii elektrycznej, wody, olejów napędowych, materiałów budowlanych itp.), a zawartość $z(t)$ magazynu – zbiornika M wynosi zero, czyli zachodzi następująca sytuacja:

$$W_1:\ y(t) < a\text{, i } z(t) = 0,$$

to odbiorca zmuszony jest wtedy do korzystania z innych źródeł zaopatrzenia lub do ograniczenia własnej produkcji, czy działalności. Prowadzi to do strat w rozważanym systemie (strat odbiorcy).

Prawdopodobieństwo wystąpienia takiego niekorzystnego zdarzenia oznaczam przez w_1 ($w_1 = P(W_1)$); wyraża się ono następującym wzorem:

$$w_1 = P(W_1) = \sum_{y_k < a} Q_k^{(m)}(\{0\}). \tag{4.44}$$

Wskaźnik w_1 jest więc prawdopodobieństwem wystąpienia deficytu podaży produktu a dla odbiorcy O (zob. rys. 8).

Niekorzystny stan systemu w okresie T_m związany jest również z innych zdarzeniem losowym W_2 : wielkość produktu $y(t)$ dostarczanego przez podsystem P przekracza zapotrzebowanie a odbiorcy O, a magazyn M jest zapełniony (zob. rys. 8), czyli zachodzi następująca sytuacja:

$$W_2:\ y(t) \geq a \text{ i } z(t) = V.$$

W tym przypadku podsystem produkcji (nadawca) P nie ma możliwości przesłania swojego produktu do odbiorcy O, co prowadzi również do strat w systemie (strat nadawcy).

Prawdopodobieństwo w_2 tego zdarzenia $(w_2 = P(W_2))$ można wyznaczyć z następującego wzoru:

$$w_2 = P(W_2) = \sum_{y_k > a} Q_k^{(m)}(\{V\}). \tag{4.45}$$

Obie wielkości w_1 i w_2 są więc wskaźnikami oceny stopnia strat produkcyjnych odpowiednio odbiorcy O (wskaźnik w_1) i podsystemu produkcji P (wskaźnik w_2).

Jako wskaźnik oceny stopnia wykorzystania elementu M w badanym systemie można przyjąć prawdopodobieństwo zdarzenia losowego W_3 postaci: poziom wypełnienia magazynu jest dodatni, ale mniejszy od V , czyli:

$$W_3:\ 0 < z(t) < V.$$

Prawdopodobieństwo w_3 zdarzenia W_3 $(w_3 = P(W_3))$ wyraża się następującym wzorem:

$$w_3 = P(W_3) = \sum_{k} Q_k^{(m)}(V). \tag{4.46}$$

Jeżeli wartość w_3 jest bliska jedności, czyli:

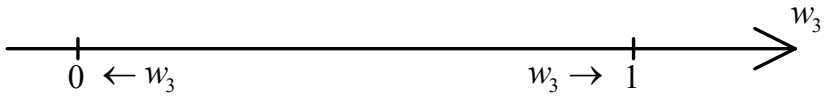
$$w_3 \to 1,$$

to małe jest prawdopodobieństwo wystąpienia deficytu podaży produktu dla odbiorcy O spowodowanego zerowym stanem podsystemu M lub strat podsystemu P jako nadawcy, wynikających z maksymalnego wypełnienia magazynu M.

W przypadku, gdy wskaźnik w_3 przyjmuje wartość bliską zera, czyli:

$$w_3 \to 0,$$

to zjawisko strat nadawcy P lub deficytu podaży dla odbiorcy O może wystąpić z dużym prawdopodobieństwem. Sytuacje te ilustruje rys. 17.



duże prawdopodobieństwo deficytu podaży u odbiorcy *O* lub strat nadawcy *P*

małe prawdopodobieństwo deficytu podaży produkctu dla odbiorcy *O* lub strat nadawcy *P*

Rys. 17. Prawdopodobieństwo deficytu podaży produktu lub strat nadawcy dla $S(za)$.

Stany graniczne podsystemu *M* można opisać wskaźnikami w_4 i w_5 określonymi odpowiednio następującymi wzorami:

$$w_4 = \sum_{y_k \le a} Q_k^{(m)}\left(\{0\}\right), \tag{4.47}$$

$$w_5 = \sum_{y_k \ge a} Q_k^{(m)}\left(\{V\}\right). \tag{4.48}$$

Wielkość w_4 jest prawdopodobieństwem zdarzenia losowego W_4 : poziom wypełnienia magazynu M wynosi zero, czyli:

$$z(t) = 0,$$

zaś wskaźnik w_5 wyraża prawdopodobieństwo zdarzenia losowego W_5 : magazyn *M* jest zapełniony, czyli:

$$z(t) = V.$$

Zatem w celu wyznaczenia wskaźników w_s $(s = 1,2,\ldots,5)$, opisujących funkcjonowanie systemu $S(za)$, należy rozwiązać układ równań (3.11)-(3.15). Wskaźniki te zależą więc od wielkości parametrów $\pi_{ik}^{(m)}$, y_l, a, V, a więc są określonymi funkcjami tych parametrów, czyli:

$$w_s = r_s\left(\pi_{ik}^{(m)}, y_l, a, V\right). \tag{4.49}$$

Można zatem optymalizować wartości podanych wskaźników poprzez odpowiednie zmiany wielkości wymienionych parametrów.

Usprawniając elementy organizacyjne działania systemu, które wpływają – jak już było zapisane wcześniej – na wartość intensywności $\pi_{ik}^{(m)}$ procesu sterującego $y(t)$, możemy oddziaływać na wartości wskaźników w_s , a tym samym – zwiększać efektywność funkcjonowania systemu logistycznego wspomagającego centrum usług.

Podam teraz przykład, w którym proces wejścia do podsystemu M posiada dwa stany: $y_1 > a$, $y_2 < a$. Przedstawię postacie wskaźników w_s, a więc – konkretne postacie funkcji (4.49) wraz z ich analizą.

Przyjmiemy zatem w modelu (3.11)-(3.15):

$$n = 2;\ k = 1,2,\ x_k = y_k - a,\ l = m.$$

Po rozwiązaniu otrzymanego układu równań otrzymujemy następujące wartości prawdopodobieństwa w_1 dla $y(t) < a$:

$$w_1 = \frac{\pi_{12}^{(m)} a_1 (a - y_2)}{\left(\pi_{12}^{(m)} + \pi_{21}^{(m)}\right) \mathrm{d}_1(V)}, \tag{4.50}$$

gdzie $\mathrm{d}_1(V)$ wynosi: $\mathrm{d}_1(V)=\pi_{12}^{(m)}\dfrac{y_2-a}{a-y_1}-\pi_{21}^{(m)}\exp(-a_1V)$,

Dalej prawdopodobieństwo w_2 dla $y(t)\geq a$ wynosi:

$$w_2=\frac{(y_1-a)a_1\exp(-a_1V)}{\left(\pi_{12}^{(m)}+\pi_{21}^{(m)}\right)\mathrm{d}_2(V)}, \tag{4.51}$$

gdzie $\mathrm{d}_2(V)$ wynosi: $\mathrm{d}_2(V)=\dfrac{\pi_{12}^{(m)}}{\pi_{21}^{(m)}}-\dfrac{y_1-a}{y_2-a}\exp(-a_1V)$,

Prawdopodobieństwo sytuacji w_3: $0<w(t)<V$ wynosi:

$$w_3=\frac{\dfrac{y_2-y_1}{y_2-a}\pi_{12}^{(m)}\left(1-\exp(-a_1V)\right)}{\left(\pi_{12}^{(m)}+\pi_{21}^{(m)}\right)\mathrm{d}_2(V)}, \tag{4.52}$$

zaś w sytuacji granicznej w_4, gdy $z(t)=0$, mamy:

$$w_4=w_1, \tag{4.53}$$

a gdy $z(t)=V$, to prawdopodobieństwo w_5 jest równe:

$$w_5=w_2, \tag{4.54}$$

i wtedy współczynnik a wynosi:

$$a_1=\frac{\pi_{21}^{(m)}}{y_2-a}+\frac{\pi_{12}^{(m)}}{y_1-a}\neq 0, \tag{4.55}$$

zaś $\mathrm{d}_2(V)$ nie znika, czyli:

$$\mathrm{d}_2(V)\neq 0. \tag{4.56}$$

Niech teraz $a_1=0$, czyli zachodzi następująca równość:

$$\frac{a-y_2}{y_1-a}=\frac{\pi_{21}^{(m)}}{\pi_{12}^{(m)}}. \tag{4.57}$$

Dla $a_1=0$ warunek (4.56) jest spełniony. W rozważanym przypadku wskaźniki $w_1,\ldots,w_2$, opisujące funkcjonowanie badanego systemu, przyjmują kolejno postać:
prawdopodobieństwo w_1 dla $y(t)<a$ mamy:

$$w_1=\frac{\pi_{12}^{(m)}(a-y_2)}{\pi_{21}^{(m)}\left(\pi_{12}^{(m)}+\pi_{21}^{(m)}\right)\mathrm{d}_3(V)}, \tag{4.58}$$

gdzie wielkość $\mathrm{d}_3(V)$ wynosi: $\mathrm{d}_3(V)=\dfrac{a-y_2}{\pi_{21}^{(m)}}+V$,

prawdopodobieństwo w_2 dla $y(t)\geq a$ mamy:

$$w_2=\frac{a-y_2}{\left(\pi_{12}^{(m)}+\pi_{21}^{(m)}\right)\mathrm{d}_3(V)}, \tag{4.59}$$

prawdopodobieństwo w_3 dla $0<w(t)<V$ mamy:

$$w_3=\frac{V(y_1-y_2)\pi_{12}^{(m)}}{\left(\pi_{12}^{(m)}+\pi_{21}^{(m)}\right)(y_1-a)\mathrm{d}_3(V)}, \tag{4.60}$$

zaś w sytuacji granicznej prawdopodobieństwo w_4, czyli dla: $z(t)=0$ spełnia poniższą równość:

$$w_4 = w_1, \tag{4.61}$$

a w sytuacji granicznej $z(t)=V$ prawdopodobieństwo w_5 spełnia poniższą równość:

$$w_5 = w_2. \tag{4.62}$$

Otrzymane w ten sposób wzory wyrażają *explicite* zależność wartości wskaźników w_s ($s=1,\ldots,5$) od wartości parametrów $\pi_{12}^{(m)}$, $\pi_{21}^{(m)}$, y_1, y_2, a, V (zob. wzór (4.49)).

Gdyby w badanym systemie logistycznym wspomagającym centrum usług nie było podsystemu *M*, to wskaźnik w_1 wystąpienia deficytu podaży produktu dla odbiorcy *O* byłby równy prawdopodobieństwu p_2 stanu y_2. Można je otrzymać przechodząc do granicy: $V \to 0$, we wzorach (4.50), (4.58), czyli spełniona jest następująca równość:

$$\lim_{V\to 0} w_1 = \frac{\pi_{12}^{(m)}}{\pi_{12}^{(m)} + \pi_{21}^{(m)}}.$$

Ponieważ mamy prawdziwą poniższą nierówność: $0 < \dfrac{a_1(a-y_2)}{\mathrm{d}_1(V)} < 1$, gdy $V>0$, $a_1 \neq 0$,

oraz zachodzi następująca nierówność: $0 < \dfrac{a-y_2}{\pi_{21}^{(m)}\mathrm{d}_3(V)} < 1$, gdy $V>0$, $a_1 = 0$,

zatem prawdziwa jest następująca zależność: $w_1 < p_2$.

Wynika stąd, że podsystem *M* zawsze zmniejsza prawdopodobieństwo wystąpienia deficytu podaży, czyli strat odbiorcy *O* w centrum usług.

W wyniku przejścia do granicy: $V \to \infty$, we wzorach (4.50) i (4.58), otrzymujemy w zależności od znaku a_1, co następuje:

- gdy $a_1 \le 0$, to mamy: $\lim_{V\to\infty} w_1 = 0$, (4.63)
- gdy $a_1 > 0$, to zachodzi równość: $\lim_{V\to\infty} w_1 = \dfrac{a_1(y_1-a)}{\pi_{12}^{(m)} + \pi_{21}^{(m)}}$.

Z relacji (4.63) wynika, że:

gdy $a_1 > 0$, a więc jeżeli spełniona jest nierówność: $\dfrac{a-y_1}{y_2-a} < \dfrac{\pi_{12}^{(m)}}{\pi_{21}^{(m)}}$,

to nawet największa objętość V magazynu *M* nie może zagwarantować mniejszego prawdopodobieństwa wystąpienia deficytu podaży czyli strat odbiorcy *O* niż następująca zależność: $\dfrac{a_1(y_1-a)}{\pi_{12}^{(m)} + \pi_{21}^{(m)}}$.

Zatem poprawnie zaprojektowany system powinien spełniać następujący warunek:

$$\frac{a-y_1}{y_2-a} \ge \frac{\pi_{12}^{(m)}}{\pi_{21}^{(m)}}. \tag{4.64}$$

Jednak warunek (4.64) nie zależy od objętości podsystemu *M*, a więc jest ograniczeniem narzuconym tylko na podsystem transportowy *T* oraz podsystem produkcji *P*.

Ze wzorów (4.51) i (4.59) wynika, że prawdziwa jest następująca równość:

$$\lim_{V\to 0} w_2 = \frac{\pi_{21}^{(m)}}{\pi_{21}^{(m)} + \pi_{12}^{(m)}}. \tag{4.65}$$

Prawa strona relacji (4.65) wyraża prawdopodobieństwo powstania strat nadawcy, gdyby magazyn M miał objętość $V = 0$. Jest ono równe prawdopodobieństwu p_1 stanu y_1.

Ponieważ zachodzi następująca nierówność:

$$w_2 < \frac{\pi_{21}^{(m)}}{\pi_{21}^{(m)} + \pi_{12}^{(m)}}, \text{ gdy } V > 0,$$

więc podsystem *M* zawsze zmniejsza prawdopodobieństwo wystąpienia strat nadawcy *P*.

Wskaźnik oceny stopnia wykorzystania podsystemu M w badanym systemie, w przypadku dużej objętości tego podsystemu, można obliczyć korzystając ze wzoru, który zależy od znaku a_1 w sposób następujący:

$$\text{gdy } a_1 > 0 \text{ mamy następującą nierówność: } \lim_{V\to\infty} w_3 = \frac{y_1 - y_2}{y_2 - a} \frac{\pi_{21}^{(m)}}{\pi_{21}^{(m)} + \pi_{12}^{(m)}},$$
$$\text{gdy zaś } a_1 \le 0 \text{ mamy z kolei inną zależność: } \lim_{V\to\infty} w_3 = \frac{y_1 - y_2}{y_2 - a} \frac{\pi_{12}^{(m)}}{\pi_{21}^{(m)} + \pi_{12}^{(m)}}. \tag{4.66}$$

Kontynuując przykład przyjmuję, że podsystem P jest kopalnią odkrywkową, a odbiorca O - elektrownią, której zapotrzebowanie na węgiel, przy odpowiednim jej obciążeniu, jest równe $2310\ \text{m}^3/\text{h}$ (czyli $a = 2310\ \text{m}^3/\text{h}$). Jest ono wyznaczone na podstawie parametrów elektrowni (moc elektrowni) i parametrów węgla (ciepło właściwe). W celu zabezpieczenia ciągłości dostaw węgla do elektrowni zbudowano w jej bezpośrednim sąsiedztwie magazyn-zbiornik M o objętości $V = 18.480\ \text{m}^3$. Magazyn ten zapewnia ciągłość dostawy węgla do elektrowni, przy odpowiedniej jej mocy, na okres 8 godzin ($V = 8 \cdot a = 2310 \cdot 8 = 18.480\ \text{m}^3$). Proces podaży produktu – węgla – przez podsystem P ma dwa stany: $y_1 = 2600\ \text{m}^3/\text{h}$, $y_2 = 0\ \text{m}^3/\text{h}$, a intensywności przejścia tego procesu są następujące: $\pi_{12}^{(m)} = 0.55$, $\pi_{21}^{(m)} = 6.92$.

Zauważmy, że wystąpienie stanu y_2, gdy poziom zapasów w magazynie wynosi zero, prowadzi do niekorzystnego stanu dla odbiorcy, czyli do wystąpienia zdarzenia losowego W_1 związanego ze stratami odbiorcy (elektrowni).

W dalszym ciągu wyznaczę:

- wskaźnik w_1 - prawdopodobieństwo zaistnienia deficytu podaży produktu dla odbiorcy O (straty elektrowni),
- wskaźnik w_2 - prawdopodobieństwo wystąpienia strat podsystemu produkcji P (starty nadawcy)

oraz

- wskaźnik w_3 - ocenę stopnia wykorzystania magazynu-zbiornika M w badanym systemie.

Ponieważ dla powyższych danych mamy konkretne wartości:

$$\frac{y_1 - a}{a - y_2} = \frac{2600 - 2310}{2310} = 0.1255, \quad \frac{\pi_{12}^{(m)}}{\pi_{21}^{(m)}} = \frac{0.55}{6.92} = 0.0795,$$

zatem warunek (4.64) jest spełniony; oznacza to, że system jest prawidłowo zaprojektowany.

Biorąc pod uwagę fakt, że $a_1 < 0$ oraz wzór (4.50), otrzymujemy konkretne wartości:

$$w_1 = \frac{0.55}{0.55 + 6.92} \cdot \frac{2.31}{6.92 \exp(18.48) - 4.281} \approx 0. \tag{4.67}$$

$$\mathrm{d}_1(V) = 0.55 \cdot \frac{2310}{2600-2310} - 6.92\exp(18.48),$$

Zatem, zgodnie z (4.67), prawdopodobieństwo wystąpienia deficytu podaży produktu dla odbiorcy *O* (straty elektrowni) jest bliskie zera.

Prawdopodobieństwo wystąpienia strat podsystemu produkcji *P* (kopalni odkrywkowej) obliczam na podstawie wzoru (4.51):

$$w_2 = \frac{(-2600+2310)10^{-3}\exp(18.48)}{(0.55+6.92)\mathrm{d}_2(V)},$$

$$\mathrm{d}_2(V) = \frac{0.55}{6.92} + \frac{2600-2310}{2310}\exp(18.48);$$

ostatecznie więc otrzymuję: $w_2 \approx 0.3$.

Ocenę stopnia wykorzystania magazynu-zbiornika *M* w badanym systemie uzyskam za pomocą wzorów (4.52), (4.66):

$$w_3 = \frac{\frac{2600}{2310}0.55(1-\exp(18.48))}{(0.55+6.92)\mathrm{d}_2(V)} \approx 0.66. \tag{4.68}$$

Magazyn *M* jest więc wykorzystany w rozważanym systemie w około 66%.

Zgodnie ze wzorami (4.53), (4.54) prawdopodobieństwo sytuacji, że poziom zapasów magazynu *M* osiągnie barierę dolną albo barierę górną jest w przybliżeniu równe odpowiednio 0 albo 0.3.

5. Prognozowanie procesów opisujących funkcjonowanie systemu logistycznego *S*(*za*).

Probabilistyczny opis funkcjonowania systemu logistycznego $S(za)$ (rozdziały 2, 3) umożliwia również wyznaczenie prognoz wielkości charakteryzujących działanie tego systemu logistycznego wspomagającego centrum usług. Prognozy te, przekazywane są do organu zarządzania tym systemem, dostarczają zatem przesłanek do zwiększenia efektywności jego funkcjonowania.

Niech $t \in T_m \cap T_i^*$, a T_i^* oznacza horyzont prognozy *i*-tej prognozowanej wielkości.

Prognozę $\hat{w}_1(t)$ prawdopodobieństwa deficytu podaży produktu dla odbiorcy *O* w chwili *t* obliczam za pomocą następującego wzoru:

$$\hat{w}_1(t) = \sum_{y_k<a} Q_k^{(m)}(\{0\}, t). \tag{5.1}$$

Prognozę $\hat{w}_2(t)$ prawdopodobieństwa strat nadawcy (podsystemu *P*) na skutek zapełnienia magazynu *M* w chwili *t* wyznaczam z wykorzystaniem poniższego wzoru:

$$\hat{w}_2(t) = \sum_{y_k>a} Q_k^{(m)}(\{V\}, t). \tag{5.2}$$

Prognozę $\hat{w}_3(t)$ wskaźnika oceny stopnia wykorzystania podsystemu *M* w badanym systemie w chwili *t* obliczam na podstawie kolejnego wzoru:

$$\hat{w}_3(t) = \sum_{k} Q_k^{(m)}(\{V\}, t). \tag{5.3}$$

Jeżeli prawdopodobieństwo zapełnienia magazynu *M* jest z przedziału $(0, V)$, czyli:

$$\hat{w}_3(t) \approx 1,$$

to w przyszłej chwili t należy oczekiwać małego prawdopodobieństwa wystąpienia deficytu podaży produktu dla odbiorcy O lub strat podsystemu P (nadawcy).

W przypadku przeciwnym, a więc gdy:

$$\hat{w}_3(t) \approx 0,$$

należy oczekiwać w przyszłej chwili t zjawiska strat nadawcy P lub deficytu produktu a u odbiorcy O z dużym prawdopodobieństwem (zob. rys. 16).

Występowanie stanów granicznych podsystemu M w przyszłej chwili t można przewidywać za pomocą poniższych wzorów:

$$\hat{w}_4(t) = \sum_{y_k \le a} Q_k^{(m)}(\{0\}, t), \tag{5.4}$$

$$\hat{w}_5(t) = \sum_{y_k \ge a} Q^{(m)}(\{V\}, t). \tag{5.5}$$

Wzór (5.4) określa prognozę $\hat{w}_4(t)$ prawdopodobieństwa wystąpienia stanu zerowego wypełnienia magazynu M w przyszłej chwili t. Natomiast relacja (5.5) oznacza prognozę $\hat{w}_5(t)$ prawdopodobieństwa maksymalnego wypełnienia w przyszłej chwili t podsystemu M.

Prognozę prawdopodobieństwa stanu częściowego wypełnienia magazynu M lub stanu y_i procesu wejścia y podsystemu M w przyszłej chwili t można obliczyć kolejno z odpowiednich wzorów na $\hat{w}_6$ i $\hat{w}_7$ w sposób następujący:
dla $0 \le c_1 < c_2 \le V$ mamy prognozę $\hat{w}_6$ postaci następującej:

$$\hat{w}_6(t) = P\left(c_1 < z(t) < c_2\right) = \sum_i \int_{c_1}^{c_2} f_i^{(m)}(z,t)\,\mathrm{d}z, \tag{5.6}$$

zaś prognozę $\hat{w}_7$ równą jak poniżej:

$$\hat{w}_7(t) = P\left(y(t) = y_i\right) = \int_0^V f_i^{(m)}(z,t)\,\mathrm{d}z + Q_i^{(m)}(\{0\}, t) + Q_i^{(m)}(\{V\}, t). \tag{5.7}$$

W celu wyznaczenia prognozy częściowego wypełnieni podsystemu M z przedziału $(0,V)$ oraz prognozy jego bariery dolnej lub bariery górnej przy stanie y_i procesu y w przyszłej chwili t można wykorzystać kolejno następujące wzory:
na prognozę prawdopodobieństwa stanu pośredniego:

$$\hat{w}_8(t) = P\left(c_1 < z(t) < c_2, y(t) = y_i\right) = \int_{c_1}^{c_2} f_i^{(m)}(z,t)\,\mathrm{d}z, \tag{5.8}$$

oraz na prognozę prawdopodobieństwa bariery dolnej:

$$\hat{w}_9(t) = Q_i^{(m)}(\{0\}, t), \tag{5.9}$$

i na prognozę prawdopodobieństwa bariery górnej:

$$\hat{w}_{10}(t) = Q_i^{(m)}(\{V\}, t). \tag{5.10}$$

Składniki tworzące prognozy (5.1)-(5.10) wyznacza się z układu równań (3.1)-(3.5) dla $l = m$.

Jeżeli $t \notin T_m$ i $t > t_0$ dla każdego $t_0 \in T_m$ oraz $t \in T_s^*$, to w celu wyznaczenia tych prognoz należy w modelu (3.1)-(3.5) dla $l = m$ przyjąć następującą równość:

$$\pi_{ik}^{(m)} = \hat{\pi}_{ik},$$

gdzie $\hat{\pi}_{ik}$ jest prognozą wielkości π_{ik} wyznaczoną za pomocą wartości $\pi_{ik}^{(1)}, \pi_{ik}^{(2)}, ..., \pi_{ik}^{(m)}$. Prognozę $\hat{\pi}_{ik}$ można uzyskać wykorzystując metody przedstawione np. w pracach [6], [9],

[44], [47], [58], [59], [60], [64], [65], [67], [80]-[85], [89], [96], [97], [122], [123], [132], [135], [136], [150], [162], [163], [164], [166].

W celu uzyskania prognoz wielowariantowych należy w modelu (3.1)-(3.15) zadać góry różne wartości $\pi_{ik}^{(m)}$. Błędy prognoz $\hat{w}_s(t)$, $s=1,2,...,10$, można oszacować przy użyciu empirycznego średniego błędu prognozy.

Prognozę $\hat{m}(t)$, czyli prognozę średniej ilości produktu w przyszłej chwili *t*, który na skutek zaistnienia „wąskiego gardła" wydostał się na zewnątrz przekaźnika *L* o przepustowości d, wyznacza się z następującego wzoru:

$$\hat{m}(t)=\sum_{y_k>d}(y_k-\mathrm{d})Q_k^{(m)}(\{V_1\},t). \tag{5.11}$$

W celu wyznaczenia prognozy $\hat{q}_1(t)$, czyli prognozę prawdopodobieństwa wystąpienia „wąskiego gardła" w przyszłej chwili *t* w rozważanym systemie można zastosować następujący wzór:

$$\hat{q}_1(t)=\sum_{y_k>d}Q_k^{(m)}(\{V_1\},t). \tag{5.12}$$

Analogicznie można wyznaczyć prognozy: $\hat{q}_2(t)$, $\hat{q}_3(t)$, $\hat{q}_4(t)$, czyli prognozy prawdopodobieństwa tego, że w przyszłej chwili *t* przekaźnik *L* będzie częściowo wypełniony lub pusty albo wypełniony całkowicie.

Funkcje $Q_k^{(m)}(\{V_1\},t)$, $Q_k^{(m)}(\{0\},t)$ umożliwiające uzyskanie prognoz $\hat{m}(t)$, $\hat{q}_1(t)$, …, $\hat{q}_4(t)$ są rozwiązaniem układu równań (3.1)-(3.5), w którym należy przyjąć $l=m$, $a=\mathrm{d}$, $V=V_1$.

Należy zauważyć fakt, że przedstawione wyżej procedury wyznaczania powyższych prognoz procesów opisujących funkcjonowanie systemu $S(za)$ i zaprezentowanych we wzorach (5.1)-(5.12) uwzględniają w sposób *explicite* następujące wielkości – parametry systemu: $\pi_{ik}^{(l)}$, y_j, V, a, V_1, d.

Umożliwia to śledzenie zmian wartości prognoz w zależności od zmian wartości tych parametrów, a więc – przewidywanie zmian w funkcjonowaniu badanego systemu, a także symulację przyszłego zachowania się systemu logistycznego wspomagającego centrum usług.

Metody prognozowania wykorzystujące pojedyncze realizacje szeregów czasowych prognozowanego procesu nie mają tej zalety.

Przedstawię dalej jedną z takich metod [59] oraz zastosowanie jej do wyznaczenia prognozy $\hat{Y}(t)$ procesu $Y(t)$ - wielkości wydobycia węgla w kopalni odkrywkowej X.

Prognozowany proces addytywny $Y(t)$ przedstawmy w postaci następującej sumy:

$$Y(t)=c(t)+r(t). \tag{5.13}$$

Funkcja $c(t)$ oznacza część zdeterminowaną procesu $Y(t)$. Charakteryzuje ona główną tendencję zmian procesu $Y(t)$, będącą wynikiem oddziaływania na niego podstawowych czynników determinujących jego przebieg. Drugi składnik we wzorze (5.13), a więc $r(t)$ jest procesem stochastycznym określającym wpływ losowych czynników

na przebieg procesu $Y(t)$ i powodujących odchylenia jego wartości od wartości wyznaczonych przez nielosową funkcję czasu $c(t)$.

Na podstawie analizy szeregu czasowego [58], [96] określonego przez ciąg obserwacji procesu $Y(t)$, czyli:

$$Y(t_1), Y(t_2), \ldots, Y(t_w)$$

można „wydzielić" część zdeterminowaną $c(t)$ tego procesu dla $t \in [t_1, t_w]$.

Mając składnik $c(t)$ możemy otrzymać rozkład (5.13) procesu $Y(t)$ przyjmując:

$$r(t) = Y(t) - c(t).$$

Ponieważ $c(t)$ jest oceną części zdeterminowanej procesu $Y(t)$, więc $r(t)$ jest oceną losowych odchyleń wartości procesu $Y(t)$ od wartości części zdeterminowanej $c(t)$ tego procesu. Dla uwzględnienia tego faktu nie wprowadzam jednak nowych oznaczeń, ponieważ nie uwzględniam błędu między rzeczywistym procesem $r(t)$, a jego oceną.

Przyjmijmy, że $r(t)$ jest stacjonarnym i ergodycznym procesem stochastycznym. Stąd wynika, że:

– wartość oczekiwana procesu $r(t)$ nie zależy od czasu, tzn.:

$$E\big(r(t)\big) = \text{const} = b, \tag{5.14}$$

– funkcja autorelacji R procesu $r(t)$ nie zależy od dowolnych momentów czasu τ_1, τ_2, lecz tylko od ich różnicy $\tau_2 - \tau_1$, to znaczy:

$$R(\tau_1, \tau_2) = E\left\{\Big[r(\tau_1) - E\big(r(\tau_1)\big)\Big]\Big[r(\tau_2) - E\big(r(\tau_2)\big)\Big]\right\} = R(\tau_2 - \tau_1). \tag{5.15}$$

Niech $\hat{r}_*(t)$ oznacza prognozę wartości r_* w chwili t, gdzie:

$$r_*(t) = r(t) - E\big(r(t)\big). \tag{5.16}$$

Przyjmując za estymator wartości oczekiwanej (5.14) następującą wielkość $\hat{b}$:

$$\hat{b} = \frac{1}{w}\sum_{i=1}^{w} r(t_i),$$

prognozę $\hat{r}_*(t)$ określimy poniższym wzorem:

$$\hat{r}_*(t) = \sum_{j=0}^{w-1} \tilde{q}_j (t - t_w)\, r_*(t_{w-j}), \tag{5.17}$$

a występujące w nim współczynniki $\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{w-1}$, jako funkcje różnicy $t - t_w$, wyznaczyć można z następującego kryterium:

$$\underset{\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{w-1}}{\text{minimum}}\, G\big(\tilde{q}_0(t-t_w), \tilde{q}_1(t-t_w), \ldots, \tilde{q}_{w-1}(t-t_w)\big), \tag{5.18}$$

gdzie $G\big(\tilde{q}_0(t-t_w), \tilde{q}_1(t-t_w), \ldots, \tilde{q}_{w-1}(t-t_w)\big) = E\big(r_*(t) - \hat{r}_*(t)\big)^2$. (5.19)

czyli różnica między wartością dokładną, a prognozowaną osiąga minimum.

Wektor $\overline{q}(t - t_w)$ niewiadomych współczynników, minimalizujących funkcję G określoną wzorem (5.19), jest rozwiązaniem układu równań, który w zapisie macierzowo-wektorowym ma następującą postać:

$$A\overline{q}(t - t_w) = \overline{e}, \tag{5.20}$$

gdzie macierz A jest postaci:

$$A=\begin{bmatrix} R(0) & R(t_w-t_{w-1}) & \dots & R(t_w-t_1) \\ R(t_{w-1}-t_w) & R(0) & \dots & R(t_{w-1}-t_1) \\ R(t_{w-2}-t_w) & R(t_{w-2}-t_{w-1}) & \dots & R(t_{w-2}-t_w) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R(t_1-t_w) & R(t_1-t_{w-1}) & \dots & R(0) \end{bmatrix},$$

zaś wektory $\overline{e}$ i $\overline{q}$ są następujące:

$$\overline{e}=\begin{bmatrix} R(t-t_w) \\ R(t-t_{w-1}) \\ \vdots \\ R(t-t_1) \end{bmatrix}, \qquad \overline{q}=\begin{bmatrix} \tilde{q}_0(t-t_w) \\ \tilde{q}_1(t-t_w) \\ \vdots \\ \tilde{q}_{w-1}(t-t_w) \end{bmatrix}.$$

Prognozę $\hat{r}$ wartości procesu r w chwili t możemy wyznaczyć za pomocą, wynikającego z relacji (5.14), (5.16), następującego wzoru:

$$\hat{r}(t)=\hat{r}_*(t)+b. \tag{5.21}$$

Stosując wzór (5.21) w praktyce, należy funkcję autokorelacji $R(\tau)$, gdy nie jest ona znana, zastąpić jej estymatorem $\hat{R}(\tau)$ wyznaczonym na podstawie realizacji, czyli następującego ciągu: $\tilde{r}_*(t_1),\tilde{r}_*(t_2),\dots,\tilde{r}_*(t_w)$ procesu $r_*(t)$.

Jako estymator $\hat{R}(\tau)$ funkcji $R(\tau)$ można przyjąć poniższą rację:

$$\hat{R}(\tau)=\frac{1}{w-\tau}\sum_{j=1}^{w-\tau}\tilde{r}_*(t_j)\tilde{r}_*(t_j+\tau), \tag{5.22}$$

gdzie $t_{j+1}-t_j=\Delta$ dla każdego $j=1,2,\dots,w-1$; zaś $\tau=l\Delta$ dla $l=0,1,2,\dots,w-1$.

Do wyznaczenia prognozy (5.21) niezbędna jest znajomość wartości estymatora funkcji autorelacji dla $\tau>(w-1)\Delta$. Można je otrzymać wykorzystując następujący ciąg:

$$\hat{R}(0),\hat{R}(\Delta),\hat{R}(2\Delta),\dots,\hat{R}((w-1)\Delta).$$

Prognozę $\hat{Y}(t)$ procesu Y w chwili t obliczyć można za pomocą następującego wzoru:

$$\hat{Y}(t)=c(t)+\hat{r}(t). \tag{5.23}$$

Prognoza ta uwzględnia zarówno główną tendencję zmian prognozowanego procesu, czyli $c(t)$, jak i wpływ, na jego przebieg, losowych czynników $\tilde{r}(t)$.

Jako miarę błędu prognozy (5.23) przyjmuję wartość oczekiwaną kwadratu różnicy rzeczywistej wartości procesu Y w przyszłej chwili t, czyli $Y(t)$ i jego prognozy $\hat{Y}(t)$ w przyszłej chwili t. Zatem błąd $\varepsilon(t)$ prognozy $\hat{Y}(t)$ wyznaczam z następującego wzoru:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t)&=E\left(Y(t)-\hat{Y}(t)\right)^2=G\left(\tilde{q}_0(t-t_w),\tilde{q}_1(t-t_w),\dots,\tilde{q}_{w-1}(t-t_w)\right)= \\ &=R(0)-2\sum_{j=0}^{w-1}\tilde{q}_j(t-w)R(t-t_{w-j})=\sum_{r=0}^{w-1}\sum_{l=0}^{w-1}\tilde{q}_r(t-w)\tilde{q}_l(t-w)R(t_{w-r}-t_{w-l}). \end{aligned} \tag{5.24}$$

Przedstawiona skrótowo metoda prognozowania należy do grupy metod prognozowania na podstawie realizacji szeregów czasowych prognozowanego procesu. Zastosuję teraz tę metodę do wyznaczenia prognozy $\hat{Y}(t)$ procesu $Y(t)$ - wielkości

wydobycia węgla w megakwintalach [Mq] w pewnej kopalni odkrywkowej X w kolejnych miesiącach w okresie sześciu badanych lat: t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5.

Ponieważ zmiany wielkości wydobycia $Y(t)$ mają charakter okresowego procesu wahań sezonowych, zatem do analizy części zdeterminowanej $c(t)$ procesu $Y(t)$ zastosować należy analizę harmoniczną wykorzystując $w = 72$ obserwacji i uwzględniając $\frac{w}{2} = 36$ harmonik. Tak więc $c(t)$ przyjmuje następującą postać:

$$c(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{36}\left(A_k \sin\frac{2\pi k}{72}t + B_k \cos\frac{2\pi k}{72}t \right), \tag{5.25}$$

gdzie współczynniki A_0, A_k i B_k wynoszą odpowiednio:

wyraz A_0 jest równy: $A_0 = \frac{1}{72}\sum_{k=1}^{72} Y(t_k)$, (5.26)

współczynniki A_k wynoszą: $A_k = \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{72} Y(t_i)\sin\frac{2\pi k}{72}t_i$, (5.27)

zaś współczynniki B_k są równe: $B_k = \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{72} Y(t_i)\cos\frac{2\pi k}{72}t_i$. (5.28)

dla $k = 1, 2, \ldots, 36$.

Szereg czasowy wielkości wydobycia węgla $Y(t)$ w kopalni odkrywkowej X w poszczególnych miesiącach w okresie sześciu obserwowanych lat przedstawia tabela 1.

Tabela 1. Wielkość wydobycia węgla w megakwintalach w kopalni odkrywkowej X w poszczególnych miesiącach w okresie sześciu lat $\{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$.

Lata	**Miesiące**	**Wartość szeregu czasowego procesu $Y(t)$ [Mq]**
t_0	I	1 015 969
	II	962 981
	III	1 041 304
	IV	829 565
	V	899 072
	VI	852 828
	VII	819 996
	VIII	941 632
	IX	994 184
	X	1 073 215
	XI	1 080 196
	XII	1 128 490
t_1	I	1 217 819
	II	1 072 709
	III	1 063 787
	IV	867 370
	V	949 781
	VI	1 016 617
	VII	968 407
	VIII	1 022 262
	IX	1 057 221
	X	1 158 849
	XI	1 128 867
	XII	1 109 192

t_2	I	1 024 665
	II	1 076 558
	III	1 166 009
	IV	962 763
	V	926 273
	VI	946 642
	VII	930 962
	VIII	923 011
	IX	987 088
	X	1 147 540
	XI	1 075 838
	XII	1 226 110
t_3	I	1 245 010
	II	1 095 837
	III	1 183 978
	IV	1 095 479
	V	1 025 430
	VI	936 053
	VII	958 713
	VIII	996 914
	IX	1 023 662
	X	1 163 491
	XI	1 124 668
	XII	1 248 663
t_4	I	1 241 918
	II	1 018 475
	III	1 126 806
	IV	936 715
	V	1 033 091
	VI	962 863
	VII	979 475
	VIII	923 643
	IX	1 159 698
	X	1 212 822
	XI	1 191 842
	XII	1 265 197
t_5	I	1 200 600
	II	1 108 377
	III	1 091 190
	IV	1 011 414
	V	1 036 577
	VI	804 915
	VII	761 069
	VIII	896 146
	IX	934 145
	X	1 204 325
	XI	1 095 625
	XII	1 318 605

Na podstawie informacji statystycznych zawartych w tej tabeli oraz wzorów (5.26)-(5.28) wyznaczam część zdeterminowaną $c(t)$, które współczynniki A_k, B_k zawarte są w tabeli 2.

Wpływ k -tej harmoniki na ogólną zmienność procesu $Y(t)$ określa następujący wzór:

$$\frac{A_k^2 + B_k^2}{2\sigma_Y^2} 100.$$

Tabela 2. Współczynniki A_i , B_i części zdeterminowanej $c(t)$ oraz wielkość wpływu poszczególnych harmonik na ogólną zmianę procesu $Y(t)$.

Numer harmoniki k	**Współczynnik** A_k	**Współczynnik** B_k	**Wpływ** k **-tej harmoniki na ogólną zmienność procesu** $Y(t)$
0	1041699	-	
1	-29242,86	-31562,45	6,28
2	-5467,69	-21494,76	1,67
3	-16506,11	-17249,66	1,93
4	15969,87	10165,68	1,22
5	1161,64	10943,79	0,41
6	9051,18	132205,14	59,57
7	-19932,47	21250,07	2,88
8	12778,81	11135,94	0,97
9	-11740,18	3817,86	0,52
10	-19762,24	11087,17	1,74
11	-5031,58	15921,13	0,85
12	-19906,97	2840,72	1,37
13	-12365,96	-7399,14	0,70
14	-2278,73	-13856,71	0,67
15	-8674,69	-2444,67	0,28
16	-8340,19	17998,65	1,33
17	15397,81	-7260,24	0,98
18	5100,97	-3106,62	0,12
19	-2137,02	11229,27	0,44
20	11888,07	6670,53	0,16
21	-18178,50	8373,96	1,36
22	2079,65	3142,08	0,05
23	-12047,16	-5571,18	0,60
24	10169,20	23007,69	2,15
25	-8400,15	9073,43	0,52
26	2065,04	-3833,17	0,06
27	5859,46	5901,99	0,23
28	12258,38	14849,96	1,26
29	10088,74	8370,55	0,58
30	39156,31	18929,34	6,42
31	-4968,58	6359,41	0,22
32	237,83	2229,78	0,02
33	9819,27	11063,45	0,74
34	6234,53	18256,91	1,26
35	-6889,85	5501,88	0,26
36	8,83	-6740,75	0,15

W ten sposób jest już wyznaczony składnik $c(t)$ prognozy $\hat{Y}(t)$ (zob. (5.23)). Aby obliczyć prognozę $\hat{Y}(t)$ procesu $Y(t)$ na kolejne 60 miesięcy, czyli pięć następnych lat dla $t \in \{t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}\}$, należy wyznaczyć drugi składnik we wzorze (5.23).

W celu wyznaczenia prognozy $\hat{r}(t)$ należy obliczyć wartości estymatora funkcji autokorelacji procesu $r_*(t)$ dla: $\tau > (w-1)(t_{j+1} - t_j) = 71$, $j = 1, 2, \ldots, w-1$.

Wartość estymatora $\hat{R}(\tau)$ dla $\tau \leq 71$ podaje tabela 3.

Tabela 3. Zbiór wartości funkcji $\hat{R}(\tau)$ dla $\tau \leq 71$.

τ	$\hat{R}(\tau)$
1	11374599
2	-11372379
3	11371530
4	-11371026
5	11370735
6	-11370548
7	11370370
8	-11370292
9	11370270
10	-11370257
11	11370236
12	-11370279
13	11370317
14	-11370311
15	11370354
16	-11370410
17	11370520
18	-11370642
19	11370760
20	-11370892
21	-11371020
22	-11371165
23	11371233
24	-11371393
25	11371538
26	-11371637
27	11371795
28	-11371909
29	11372004
30	-11372126
31	11372310
32	-11372527
33	11372734
34	-11372889
35	11373112
36	-11373379
37	11373620
38	-11373922
39	11374199
40	-11374534
41	11374743
42	-11375113
43	11375464
44	-11375891
45	-11376174
46	-11376536
47	11376857
48	-11377408
49	11377792
50	-11378439
51	11379056

52	-11379659
53	11380401
54	-11381312
55	11382226
56	-11383354
57	11384509
58	-11385944
59	11387183
60	-11388783
61	11390167
62	-11392324
63	11394676
64	-11397436
65	11400554
66	-11404873
67	11409715
68	-11415468
69	11423549
70	-11435359
71	11450765
72	-11480389

Z informacji statystycznej zawartej w tabeli 3 wynika, że estymator $\hat{R}(\tau)$ można opisać za pomocą funkcji (5.25). Wartości współczynników tej funkcji podaje tabela 4.

Tabela 4. Wartości współczynników szeregu trygonometrycznego (5.25) opisującego estymator $\hat{R}(\tau)$.

Nr harmoniki i	**Współczynnik** A_i	**Współczynnik** B_i
0	-887,96	
1	-34,56	-1744,09
2	-106,29	-1733,94
3	-163,19	-1733,40
4	-237,55	-1733,27
5	-295,18	-1745,32
6	-345,76	-1755,16
7	-404,33	-1754,18
8	-477,51	-1753,50
9	-537,27	-1766,36
10	-606,32	-1770,27
11	-680,10	-1776,53
12	-744,52	-1795,48
13	-819,56	-1794,97
14	-909,51	-1792,25
15	-1005,94	-1803,69
16	-1105,41	-1822,74
17	-1219,57	-1830,74
18	-1336,59	-1881,59
19	-1452,90	-1921,82
20	-1574,58	-1973,60
21	-1703,31	-2014,72
22	-1852,95	-2058,79
23	-2022,34	-2137,26
24	-2201,16	-2200,24
25	-2417,53	-2321,54
26	-2628,25	-2428,25

27	-2881,44	-2542,32
28	-3212,05	-2714,17
29	-3606,66	-2954,55
30	-4087,58	-3307,16
31	-4627,36	-3781,42
32	-5252,62	-4380,36
33	-6294,19	-5426,68
34	-7569,75	-7274,87
35	-9071,34	-8889,58
36	-6107,79	-10889,05

Informacje podane w tabeli 4 oraz wzory (5.16), (5.20), (5.17) pozwalają już wyznaczyć prognozę $\hat{r}_*(t)$ procesu $r_*(t)$. Stąd, oraz z tabel 1, 2 i wzorów (5.25), (5.23), otrzymuję prognozę procesu $Y(t)$ dla kolejnych 60 miesięcy lat t_6, t_7, t_8 t_9, t_{10}. Prognozy wielkości wydobycia węgla wraz z ich błędami przedstawia tabela 5.

Tabela 5. Prognoza wielkości wydobycia $Y(t)$ w kopalni odkrywkowej X na lata $\{t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}\}$.

Lata	**Miesiące**	**Wartość części zdeterminowanej $c(t)$ prognozy**	**Wartość części losowej $\hat{r}(t)$ prognozy**	**Prognoz wielkości wydobycia $\hat{Y}(t)$**	**Błąd prognozy procesu $Y(t)$**	
					$\varepsilon(t)$	$\frac{\varepsilon(t)}{\hat{Y}(t)}100$
t_6	I	1019437	3243	1022680	6745	0,65
	II	959572	12832	972404	8534	0,87
	III	1044688	7001	1051689	7019	0,66
	IV	826147	-5773	820374	7091	0,86
	V	902480	6662	909142	7270	0,79
	VI	849414	-9829	839585	8649	1,03
	VII	823396	12597	835993	8811	1,05
	VIII	938261	-9202	929059	8280	0,89
	IX	997572	10738	1008310	8569	0,84
	X	1069845	-10518	1059327	8648	0,81
	XI	1083566	11018	1094584	8328	0,76
	XII	1125136	-8434	1116702	8243	0,73
t_7	I	1221180	11258	1232438	8375	0,70
	II	10693317	-9761	1059556	8534	0,80
	III	1067147	11120	1078267	8538	0,79
	IV	863966	-10012	853954	8369	0,98
	V	953191	10095	963286	8309	0,86
	VI	1013224	-9168	1004056	8235	0,82
	VII	971788	9662	981450	8106	0,82
	VIII	1018887	-8636	1010251	7805	0,77
	IX	1060610	8095	1068705	7896	0,73
	X	1155479	-8059	1147420	7800	0,67
	XI	1132231	8010	1140241	7424	0,65
	XII	1105810	-5841	1099969	7335	0,66
t_8	I	1028022	6657	1034679	6674	0,64
	II	1073212	-5276	1067936	7173	0,67
	III	1169363	4878	1174241	7617	0,64
	IV	959357	-4456	954901	107874	11,29
	V	929653	4505	934158	7094	0,75
	VI	943263	-3496	939767	7133	0,75
	VII	934333	2997	937330	7083	0,75
	VIII	919634	-2186	917448	7215	0,78
	IX	990487	2501	992988	7076	0,71

	X	1144172	-2039	1142133	7228	0,63
	XI	1079200	1360	1080560	7227	0,66
	XII	1222776	-1020	1221756	7444	0,60
t_9	I	1248342	770	1249112	7607	0,60
	II	1092469	-274	1092195	7600	0,69
	III	1187347	-204	1187143	7627	0,64
	IV	1092089	268	1092357	7337	0,67
	V	1028785	-405	1028380	7723	0,75
	VI	932672	1150	934222	33977	3,63
	VII	962092	-1668	960424	7929	0,82
	VIII	993542	2032	995574	8167	0,82
	IX	1027045	-1685	1025360	7895	0,76
	X	1160135	2351	1162486	8254	0,71
	XI	1128023	-2664	1125399	8372	0,74
	XII	1245334	3178	1248512	8476	0,67
t_{10}	I	1245230	-2281	1242949	8283	0,66
	II	1015115	3821	1018936	8420	0,82
	III	1130158	-2251	1127907	8017	0,71
	IV	933333	2253	935586	8363	0,89
	V	1036469	-2460	1034009	8295	0,80
	VI	959480	2265	961745	8151	0,84
	VII	982840	-1121	981719	7849	0,79
	VIII	920279	1573	921852	7835	0,84
	IX	1163110	-536	1162574	7851	0,67
	X	1209433	386	1209819	7324	0,60
	XI	1195222	1433	1196655	7169	0,59
	XII	1261827	-515	1261312	7325	0,58

Warto zauważyć, że:

- obliczone prognozy mają małe względne błędy procentowe; wahają się one w granicach około 1% z wyjątkiem dwóch przypadków,
- w praktyce, do wyznaczenia prognozy wielkości wydobycia węgla, można ograniczyć się do znacznie mniejszej liczby harmonik niż 36. Możliwość ta wynika z analizy wpływu poszczególnych harmonik na ogólną zmienność procesu $Y(t)$. Dla przykładu, do wyznaczenia części zdeterminowanej $c(t)$ procesu $Y(t)$, można ograniczyć się do 5 harmonik ($i = 1, 6, 7, 24, 30$), które wyjaśniają 77,3% ogólnej zmienności procesu $Y(t)$.

6. Analiza funkcjonowania systemu logistycznego w przypadku strukturalnego procesu dostawy produktu.

W celu uwzględnienie *explicite* działania podsystemu transportowego T w analizie funkcjonowania badanego systemu logistycznego, wprowadzam proces $v(t)$ określony następującym wzorem:

$$v(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy podsystem } T \text{ znajduje się w stanie pracy,} \\ 0, & \text{gdy podsystem } T \text{ nie pracuje czyli jest w stanie awarii.} \end{cases} \tag{6.1}$$

Wtedy poziom zapasów $z(t)$ podsystemu M sterowany jest procesem $w(t)$ określonym następująco:

$$w(t) = y(t)v(t),$$

gdzie $y(t)$ opisuje wielkość produkcji podsystemu P (zob. rozdz. 1 i 2), zaś $v(t)$ określa wzór (6.1).

Przyjmiemy, że procesy $y(t)$ i $v(t)$ są niezależne, a $v(t)$ jest ciągłym, jednorodnym i ośrodkowym procesem Markowa o następujących intensywnościach: pierwsze, to intensywność przejścia podsystemu T od stanu pracy do przerwy w pracy, czyli awarii:

$$\pi_{10}^{*} = \pi_{1}^{*},$$

oraz druga to intensywność przejścia podsystemu T od przerwy w pracy, czyli awarii, do stanu pracy:

$$\pi_{01}^{*} = \pi_{0}^{*}.$$

Poziom wypełnienia $z(t)$ magazynu M w przedziale $[\alpha_1, \alpha_2)$ stałości realizacji procesu $w(t)$ spełnia następujący warunek:

dla $\alpha_1 \le t_1 < t < \alpha_2$ mamy:

$$z(t) = h[z(t_1) + (w(t_1) - a)(t - t_1)], \tag{6.2}$$

gdzie h jest funkcją określoną wzorem (1.1).

Funkcjonowanie badanego systemu charakteryzuje teraz trójwymiarowy proces stochastyczny:

$$(y(t), v(t), z(t)).$$

Działanie tego systemu analizowane będzie w trzech następujących wariantach:

- nieekstremalny stan poziomu zapasów podsystemu *M*, czyli dla:

$$0 < z(t) < V,$$

- stan graniczny dolny poziomu zapasów podsystemu *M*, czyli dla:

$$z(t) = 0,$$

- górny stan graniczny poziomu zapasów podsystemu *M* czyli dla:

$$z(t) = V$$

ponieważ odpowiadają im różne warunki pracy systemu.

Dla tych celów (podobnie jak w rozdziale 2) wystarczy wyznaczyć prawdopodobieństwa odpowiadające trzem wariantom analizy funkcjonowania rozważanego systemu (zob. wzory (2.1)-(2.3) postaci następującej:

dla nieekstremalnego stanu, czyli $0 < \alpha < V$ mamy następujące prawdopodobieństwo:

$$P(0 < z(t) < \alpha,\ x(t) = x_k,\ v(t) = u) = \int_0^{\alpha} f_k^{(u)}(z,t)\,dz, \tag{6.3}$$

dla stanu granicznego dolnego mamy następujące prawdopodobieństwo:

$$P(z(t) = 0,\ x(t) = x_k,\ v(t) = u), \tag{6.4}$$

dla stanu granicznego górnego mamy następujące prawdopodobieństwo:

$$P(z(t) = V,\ x(t) = x_k,\ v(t) = u), \tag{6.5}$$

gdzie $f_k^{(u)}(z,t)$ oznacza funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa, a x_k jest k -tym stanem procesu $x(t)$ zdefiniowanego poniżej:

$$x(t) = y(t) - a \quad (x_k = y_k - a,\ k = 1,2,...,n);$$

dla $u = 1$ (praca) lub $u = 0$ (awaria).

Prawdopodobieństwa $P(0 < z(t) < V,\ x(t) = x_k,\ v(t) = u)$ we wzorze (6.3) znajdziemy z następującego wzoru:

$$P(0 < z(t) < V,\ x(t) = x_k,\ v(t) = u) = \lim_{a \to V} P(0 < z(t) < \alpha,\ x(t) = x_k,\ v(t) = u).$$

Aby uwzględnić zmiany następujących parametrów:

$$\pi_{ij},\ \pi_{10}^{*},\ \pi_{01}^{*}$$

w czasie, tj. przejścia podsystemu T – odpowiednio – z i -tego do j -tego stanu, oraz ze stanu pracy ($u=1$) do awarii ($u=0$) i ze stanu awarii ($u=0$) do pracy ($u=1$) procesu $w(t)$ określonego, jak poniżej:

$$w(t)=y(t)v(t)$$

sterującego poziomem zapasów magazynu M, analizować będziemy funkcjonowanie rozważanego systemu w m kolejnych okresach czasu:

$$T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_m.$$

Niech zatem okresowi T_l odpowiadają intensywności:

$$\pi_{ij}^{(l)},\ \pi_{10}^{*l}=\pi_1^{*l},\ \pi_{01}^{*l}=\pi_0^{*l},\ (\ l=1,2,...,m\ ).$$

6.1. Nieekstremalny stan poziomu zapasów.

Funkcjonowanie systemu w przypadku, gdy poziom zapasów produktu w podsystemie M spełnia następujący warunek:

$$0<z(t)<V\ ,$$

zostanie scharakteryzowane prawdopodobieństwem następującej postaci:

$$Q_k^{ul}(\alpha,t)=P\left(0<z(t)<\alpha,\ x(t)=x_k,\ v(t)=u\right)=\int_0^{\alpha} f_k^{ul}(z,t)\,dz. \tag{6.6}$$

dla $0<\alpha<V$, $t\in T_l$.

Proces $v(t)$ opisujący funkcjonowanie podsystemu transportowego T (praca/awaria), spełnia następujące związki (zob. relacje (2.5), (2.6) dla procesu $x(t)$), czyli następujące prawdopodobieństwa warunkowe:

$$P\left(v(s)=0 \text{ dla } t\le s\le t+\tau \mid v(t)=0\right)=\exp\left(-\pi_0^{*l}\tau\right), \tag{6.7}$$

$$P\left(v(s)=0 \text{ dla } t\le s<t+\theta,\ v(t+\theta)=1,\ 0<\theta<\tau \mid v(t)=0\right)= \\ =\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\left(1-\exp\left(-\pi_0^{*l}\tau\right)\right), \tag{6.8}$$

$$P\left(v(s)=1 \text{ dla } t\le s\le t+\tau \mid v(t)=1\right)=\exp\left(-\pi_1^{*l}\tau\right), \tag{6.9}$$

$$P\left(v(s)=1 \text{ dla } t\le s<t+\theta,\ v(t+\theta)=0,\ 0<\theta<\tau \mid v(t)=1\right)= \\ =\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\left(1-\exp\left(-\pi_1^{*l}\tau\right)\right), \tag{6.10}$$

gdzie $t\in T_l$, $t+\tau\in T_l$.

Prawdopodobieństwa $Q_k^{ul}(\alpha,t)$ spełniają następujące związki (analogiczne do relacji (2.7)-(2.9)) w zależności od stanu, w jakim znajduje się podsystem transportowy T.

Dla stanu awarii, czyli dla $v(t)=u=0$ mamy następujące prawdopodobieństwa:

$$Q_k^{0l}(\alpha,t+\tau)=P\left(0<z(t+\tau)<\alpha,\ x(t+\tau)=x_k,\ v(t+\tau)=0\right)= \\ =\sum_i\int_0^V q_{ik}^{00l}(z,\alpha;\ \tau,t)\,Q_i^{0l}(\mathrm{d}z,t)+\int_0^V q_{kk}^{10l}(z,\alpha;\ \tau,t)\,Q_k^{1l}(\mathrm{d}z,t), \tag{6.11}$$

gdzie prawdopodobieństwa warunkowe są następujące:

$$q_{ik}^{00l}(z,\alpha;\ \tau,t)=P\big(x(t)\ \text{ ma jeden skok w }\ t+\theta\in(t,t+\tau),\ \ v(s)=0,\\ \text{dla }\ s\in[t,t+\tau],\ 0<z-a\tau<\alpha\,|\,x(t)=x_i,\ \ v(t)=0\big)+o_1^{(l)}(\tau);\tag{6.12}$$

dla $i\neq k$, $0<\alpha<V$, $z=z(t)\in[0,V)$, $t\in T_l$, $t+\tau\in T_l$,

$$q_{kk}^{00l}(z,\alpha;\tau,)=P\big(x(s)=x_k,\ v(s)=0\ \text{dla}\ t\le s\le t+\tau,\ 0<z-\tau a<\alpha\,|\\ |\,x(t)=x_k,\ v(t)=0\big)+o_1^{(l)}(\tau);\tag{6.13}$$

dla $0<\alpha<V$, $z=z(t)\in[0,V]$, $t\in T_l$, $t+\tau\in T_l$,

$$q_{kk}^{10l}(z,\alpha;\ \tau,t)=P\big(x(s)=x_k\ \text{ dla }\ s\in[t,t+\tau],\ \ v(t)\ \text{ ma jeden skok}\\ \text{w }\ t+\theta\in(t,t+\tau),\ 0<h(z+x_k\theta)-a(\tau-\theta)<\alpha\,|\,x(t)=x_k,\ \ v(t)=1\big)+\\ +o_1^{(l)}(\tau);\tag{6.14}$$

dla $0<\alpha<V$, $z=z(t)\in[0,V]$, $t\in T_l$, $t+\tau\in T_l$,

Zaś dla stanu pracy, czyli dla $v(t)=u=1$ mamy następujące prawdopodobieństwa:

$$Q_k^{1l}(\alpha,t+\tau)=P\big(0<z(t+\tau)<V,\ \ x(t+\tau)=x_x,\ \ v(t)=1\big)=\\ =\sum_i\int_0^V q_{ik}^{11l}(z,\alpha;\ \tau,t)Q_i^{1l}(\mathrm{d}z,t)+\int_0^V q_{kk}^{01l}(z,\alpha;\ \tau,t)Q_k^{0l}(\mathrm{d}z,t),\tag{6.15}$$

gdzie prawdopodobieństwa warunkowe mają następujące postacie:

$$q_{ik}^{11l}(z,\alpha;\ \tau,t)=P\big(x(t)\ \text{ ma jeden skok w }\ t+\theta\in(t,t+\tau),\\ v(s)=1\ \text{ dla }\ t\le s\le t+\tau,\\ 0<h(z+\theta x_i)+(\tau-\theta)x_k<\alpha\,|\,x(t)=x_i,\ \ v(t)=1\big)+o_1^{(l)}(\tau);\tag{6.16}$$

dla $i\neq k$, $0<\alpha<V$, $z=z(t)\in[0,V]$, $t\in T_l$, $t+\tau\in T_l$,

$$q_{kk}^{01l}(z,\alpha;\ \tau,t)=P\big(x(s)=x_k\ \text{ dla }\ t\le s\le t+\tau,\ \ v(t)\\ \text{ma jeden skok w }\ t+\theta\in(t,t+\tau),\\ 0<h(z-a\theta)+x_k(\tau-\theta)<\alpha\,|\,x(t)=x_k,\ \ v(t)=0\big)+o_1^{(l)}(\tau);\tag{6.17}$$

dla $0<\alpha<V$, $z=z(t)\in[0,V]$, $t\in T_l$, $t+\tau\in T_l$,

$$q_{kk}^{11l}(z,\alpha;\tau,t)=P\big(x(s)=x_k,\ v(s)=1\ \text{dla}\ s\in[t,t+\tau],\\ 0<z+\tau x_k<\alpha\,|\,x(t)=x_k,\ v(t)=1\big)+o_1^{(l)}(\tau);\tag{6.18}$$

dla $0<\alpha<V$, $z=z(t)\in[0,V]$, $t\in T_l$, $t+\tau\in T_l$,

W celu obliczenia prawdopodobieństw (6.11) i (6.15) należy wyznaczyć *explicite* wzory dla prawdopodobieństw warunkowych (6.12)-(6.14) oraz (6.16)-(6.18). Otrzymuje się je analogicznie, jak relacje (2.13), (2.17)-(2.27).

6.1.1. Prawdopodobieństwa warunkowe w przypadku stanu nieekstremalnego.

Ze wzorów (2.6), (6.9), (6.16) otrzymujemy następujące prawdopodobieństwa warunkowe:

$$q_{ik}^{11l}(z,\alpha;\ \tau,t)-o_1^{(l)}(\tau)=\exp\left(-\pi_1^{*l}\tau\right)\int_A \frac{\pi_{ik}^{(l)}}{\pi_i^{(l)}}d\left(1-\exp\left(-\pi_i^{(l)}\theta\right)\right), \tag{6.19}$$

gdzie zbiór A, po którym się całkuje ma postać następującą:

$$A=\left\{\theta:0<\theta<\tau,\ 0<h\left(z+\theta x_i\right)+\left(\tau-\theta\right)x_k<\alpha\right\}, \tag{6.20}$$

dla $i\neq k,\ z=z(t)\in[0,V],\ t\in T_l,\ t+\tau\in T_l$.

Zauważmy, że gdy $x_i>0$, $x_k>0$, $t\in T_l$, $t+\tau\in T_l$, τ małe, $0<\theta<\tau$, to zbiór A jest następujący:

$$\left\{\theta:0<h\left(z+\theta x_i\right)+\left(\tau-\theta\right)x_k<\alpha\right\}=\left\{\theta:z+x_i\theta<V\right\}\cap$$

$$\cap\left\{\theta:0<z+\theta\left(x_i-x_k\right)+\tau x_k<\alpha\right\}=$$

$$=\left\{\theta:\theta<\frac{V-z}{x_i}\right\}\cap\left\{\theta:-z+\tau x_k<\theta\left(x_i-x_k\right)<\alpha-z-\tau x_k\right\}$$

i może być równy, w zależności od różnych przypadków, jak poniżej:

gdy $x_i-x_k>0,\ z<\alpha-\tau x_k$, to mamy zbiór A równy: $\left\{\theta:0<\theta<\frac{\alpha-z-\tau x_k}{x_i-x_k}\right\}$,

gdy $x_i-x_k>0,\ z$ pozostałe, to zbiór A równy: $\varnothing$,

gdy $x_i-x_k<0,\ z<\alpha-\tau x_k$, wtedy zbiór A równy: $\left\{\theta:0<\theta<\frac{-z-\tau x_k}{x_i-x_k}\right\}$,

gdy $x_i-x_k<0,\ z$ pozostałe, wtedy zbiór A równy: $\left\{\theta:\frac{\alpha-z-\tau x_k}{x_i-x_k}<\theta<\frac{z-\tau x_k}{x_i-x_k}\right\}$.

Uwzględniając wzór (6.20) otrzymujemy, (analogicznie jak w (2.12)) w zależności od znaku różnicy x_i-x_k i poziomu z, różne postacie zbioru A.

gdy $x_i-x_k<0,\ 0\le z<\alpha-\tau x_k$, to mamy: $A=\left\{\theta:0<\theta<\tau\right\}$,

gdy $x_i-x_k<0,\ \alpha-\tau x_k<z<\alpha-\tau x_i$, to mamy: $A=\left\{\theta:\frac{\alpha-z-\tau x_k}{x_i-x_k}<\theta<\tau\right\}$,

gdy $x_i-x_k<0,\ z$ pozostale, to mamy: $A=\varnothing$,

gdy $x_i-x_k>0,\ \alpha-\tau x_k<z<\alpha-\tau x_i$, to mamy: $A=\left\{\theta:0<\theta<\frac{\alpha-z-\tau x_k}{x_i-x_k}\right\}$,

gdy $x_i-x_k>0,\ 0\le z<\alpha-\tau x_k$, to mamy: $A=\left\{\theta:0<\theta<\tau\right\}$,

gdy $x_i-x_k>0,\ z$ pozostale, to mamy: $A=\varnothing$.

Stąd po zastosowaniu wzoru (6.19) dla: $i\neq k$, $0<\alpha<V$, $x_i>0$, $x_k>0$, $t\in T_l$, $t+\tau\in T_l$ mamy różne postacie prawdopodobieństw:

$$q_{ik}^{11l}(z,\alpha;\ \tau,t)-o_1^{(l)}(\tau), \tag{6.21}$$

a więc, w zależności od x_i, x_k oraz z, mogą one być równe, co następuje:

gdy $x_i>x_k,\ \alpha-\tau x_i<z<\alpha-\tau x_k$, wtedy wynoszą one:

$$\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\frac{\alpha-z-\tau x_k}{x_i-x_k}+o^{(l)}\left(\tau;\ \alpha,z\right),$$

gdy $x_i > x_k$, $0 \le z < \alpha - \tau x_i$, wtedy wynoszą one: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}\left(\tau\right)$,

gdy zaś $x_i > x_k$, z pozostale, wtedy wynosi wynoszą one: 0,

gdy $x_i < x_k$, $0 \le z < \alpha - \tau x_k$, to wynoszą one: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}\left(\tau\right)$,

gdy $x_i < x_k$, $\alpha - \tau x_k < z < \alpha - \tau x_i$, to wynoszą one:

$$\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau-\frac{\alpha-z-\tau x_k}{x_i-x_k}\right)+o^{(l)}\left(\tau;\ \alpha,z\right),$$

gdy zaś $x_i < x_k$, z pozostale, wtedy jest ono równe: 0.

Analogicznie można wykazać, że gdy: $0 < \alpha < V$, $t \in T_l$, $t+\tau \in T_l$,

to prawdopodobieństwa (6.16)-(6.18) oraz (6.12)-(6.14), w pozostałych przypadkach wyrażają się poniższymi wzorami (będącymi odpowiednikami relacji (2.13), (2.17)-(2.27)) w zależności od różnych przypadków w sposób następujący.

Dla $x_i > 0$, $x_k = 0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{ik}^{1,1l}\left(z,\alpha;\ \tau,t\right)-o^{(l)}\left(\tau\right) \tag{6.22}$$

jest równe, w zależności od poziomu z, jak poniżej:

gdy $0 \le z < \alpha - \tau x_i$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}\left(\tau\right)$,

gdy $\alpha - \tau x_i < z < \alpha$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\frac{\alpha-z}{x_i} + o^{(l)}\left(\tau;\ \alpha,z\right)$,

gdy z pozostałe, to wynosi ono: 0.

Dla $x_i < 0$, $x_k > 0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{ik}^{1,1l}\left(z,\alpha;\ \tau,t\right)-o_1^{(l)}\left(\tau\right) \tag{6.23}$$

jest równe, w zależności od poziomu z, jak poniżej:

gdy $0 \le z < -\tau x_i$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\frac{-z}{x_i} + o^{(l)}\left(\tau;\ z\right)$,

gdy $-\tau x_i < z < \alpha - \tau x_k$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}\left(\tau\right)$,

gdy $\alpha - \tau x_k < z < \alpha - \tau x_i$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau-\frac{\alpha-z-\tau x_k}{x_i-x_k}\right)+o^{(l)}\left(\tau;\ \alpha,z\right)$,

gdy z pozostałe, to wynosi ono: 0.

Dla $x_i < 0$, $x_k < 0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{ik}^{1,1l}\left(z,\alpha;\ \tau,t\right)-o_1^{(l)}\left(\tau\right) \tag{6.24}$$

jest równe, w zależności od różnych przypadków, jak poniżej:

gdy $x_i < x_k$, $-\tau x_k < z < -\tau x_i$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\frac{z+\tau x_k}{x_k-x_i}+o^{(l)}\left(\tau;\ z\right)$,

gdy $x_i < x_k$, $-\tau x_i < z < \alpha - \tau x_k$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}\left(\tau\right)$,

gdy $x_i < x_k$, $\alpha - \tau x_k < z < \alpha - \tau x_i$, to wynosi ono:

$$\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau-\frac{\alpha-z-\tau x_k}{x_i-x_k}\right)+o^{(l)}\left(\tau;\ \alpha,z\right),$$

gdy $x_i < x_k$, z pozostale, to wynosi ono: 0.

Ponadto gdy $x_i > x_k$, $-\tau x_i < z < -\tau x_k$, to jest ono równe:

$$\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau+\frac{z+\tau x_k}{x_i-x_k}\right)+o^{(l)}\left(\tau;\ z\right),$$

gdy $x_i > x_k$, $-\tau x_k < z < \alpha - \tau x_i$, to jest ono równe: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)$,

gdy $x_i > x_k$, $\alpha - \tau x_i < z < \alpha - \tau x_k$, to jest ono równe:

$$\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\frac{\alpha-z-\tau x_k}{x_i-x_k}+o^{(l)}\left(\tau;\ \alpha,z\right),$$

gdy $x_i > x_k$, z pozostale, to jest ono równe: 0.

Dla $x_i < 0$, $x_k = 0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{ik}^{11l}\left(z,\alpha;\ \tau,t\right)-o_1^{(l)}\left(\tau\right) \tag{6.25}$$

jest równe, w zależności od różnych przypadków, jak poniżej:

gdy $0 < z < -\tau x_i$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\frac{-z}{x_i}+o^{(l)}\left(\tau;\ z\right)$,

gdy $-\tau x_i < z < \alpha$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)$,

gdy $\alpha < z < \alpha - \tau x_i$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau-\frac{\alpha-z}{x_i}\right)+o^{(l)}\left(\tau;\ \alpha,z\right)$,

gdy zaś z pozostałe, to wynosi ono: 0.

I dalej dla $x_i \geq 0$, $x_k < 0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{ik}^{11l}\left(z,\alpha;\ \tau,t\right)-o_1^{(l)}\left(\tau\right) \tag{6.26}$$

jest równe, w zależności od różnych poziomów z, jak poniżej:

gdy $0 \leq z < -\tau x_k$, to jest ono równe: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau+\frac{z+\tau x_k}{x_i-x_k}\right)+o^{(l)}\left(\tau;\ z\right)$,

gdy $-\tau x_k < z < \alpha - \tau x_i$, to jest ono równe: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)$,

gdy $\alpha - \tau x_i < z < \alpha - \tau x_k$, to jest ono równe: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\frac{\alpha-z-\tau x_k}{x_i-x_k}+o^{(l)}\left(\tau;\ \alpha,z\right)$,

gdy zaś z pozostałe, to jest ono równe: 0.

Dla $x_k > 0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{kk}^{11l}\left(z,\alpha;\ \tau,t\right)-o_1^{(l)}\left(\tau\right) \tag{6.27}$$

jest równe, w zależności od różnych wartości z, jak poniżej:

gdy $0 \leq z < -\tau a$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_0^{*l}\frac{z}{\alpha}+o^{(l)}\left(\tau;\ z\right)$,

gdy $\tau a < z < \alpha - \tau x_k$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_0^{*l}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)$,

gdy $\alpha - \tau x_k < z < \alpha - a$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_0^{*l}\left(\tau+\frac{\alpha-z-\tau x_k}{a+x_k}\right)+o^{(l)}\left(\tau;\ \alpha,z\right)$,

gdy zaś z pozostałe, to wynosi ono: 0.

Dla $x_k = 0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{kk}^{01l}\left(z,\alpha;\ \tau,t\right)-o_1^{(l)}\left(\tau\right) \tag{6.28}$$

jest równe, w zależności od różnych poziomów z, jak poniżej:

gdy $0 < z < \tau a$, to jest ono równe: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_0^{*l}\dfrac{z}{\alpha}+o^{(l)}\left(\tau;\ z\right)$,

gdy $\tau a < z < \alpha$, to jest ono równe: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_0^{*l}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)$,

gdy $\alpha < z < \alpha+\tau a$, to jest ono równe: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_0^{*l}\left(\tau+\dfrac{\alpha-z}{a}\right)+o^{(l)}\left(\tau;\ \alpha,z\right)$,

gdy z pozostałe, to jest ono równe: 0.

Dla $x_k < 0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{kk}^{01l}\left(z,\alpha;\ \tau,t\right)-o_1^{(l)}\left(\tau\right) \tag{6.29}$$

jest równe, w zależności od różnych wartości z, jak poniżej:

gdy $x_k + a \le 0,\quad \tau a < z < \alpha+\tau a$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_0^{*l}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)$,

gdy $x_k + a \le 0,\quad z$ pozostale, to wynosi ono: 0,

gdy $x_k + a > 0,\quad -x_k\tau < z < a\tau$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_0^{*l}\dfrac{z+\tau x_k}{x_k+a}+o^{(l)}\left(\tau;\ z\right)$,

gdy $x_k + a > 0,\quad a\tau < z < \alpha-\tau x_k$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_0^{*l}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)$,

gdy $x_k + a > 0,\quad \alpha-\tau x_k < z < \alpha+\tau x_k$, to wynosi ono:

$$\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_0^{*l}\left(\tau+\frac{\alpha-z-\tau x_k}{x_k+a}\right)+o^{(l)}\left(\tau;\ \alpha,z\right)$$

gdy zaś $x_k + a > 0,\quad z$ pozostale, to wynosi ono: 0.

Dla $x_k > 0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{kk}^{10l}\left(z,\alpha;\ \tau,t\right)-o_1^{(l)}\left(\tau\right) \tag{6.30}$$

jest równe, w zależności od poziomu z, jak poniżej:

gdy $0 \le z < a\tau$, to jest ono równe: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_1^{*l}\left(\tau+\dfrac{z-a\tau}{x_k+a}\right)+o^{(l)}\left(\tau;\ z\right)$,

gdy $\alpha-\tau x_k < z < \alpha+\tau x_k$, to jest ono równe: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_1^{*l}\dfrac{\alpha-z+a\tau}{x_k+a}+o^{(l)}\left(\tau;\ \alpha,z\right)$,

gdy $a\tau < z < \alpha-\tau x_k$, to jest ono równe: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_0^{*l}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)$,

gdy zaś z pozostałe, to jest ono równe: 0.

Dla $x_k < 0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{kk}^{10l}\left(z,\alpha;\ \tau,t\right)-o_1^{(l)}\left(\tau\right) \tag{6.31}$$

jest równe, w zależności od wartości dumy $x_k + a$ i od poziomu z, jak poniżej:

gdy $x_k + a \le 0,\quad \tau a < z < \alpha+\tau a$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_1^{*l}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)$,

gdy zaś $x_k + a \le 0,\quad z$ pozostale, to wynosi ono: 0,

gdy $x_k + a > 0,\quad -x_k\tau < z < a\tau$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_1^{*l}\left(\tau-\dfrac{a\tau-z}{x_k+a}\right)+o^{(l)}\left(\tau;\ z\right)$,

gdy $x_k + a > 0,\quad a\tau < z < \alpha-\tau x_k$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_1^{*l}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right)$,

gdy $x_k + a > 0,\quad \alpha-\tau x_k < z < \alpha+\tau x_k$, to wynosi ono:

$$\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_1^{*l}\,\frac{\alpha-z+a\tau}{x_k+a}+o^{(l)}\left(\tau;\ \alpha,z\right),$$

gdy zaś $x_k+a>0,\ \ z$ pozostale , to wynosi ono: 0 .

Dla $x_k=0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{kk}^{10l}\left(z,\alpha;\ \tau,t\right)-o_1^{(l)}\left(\tau\right) \tag{6.32}$$

jest równe, w zależności od poziomu z , jak poniżej:

gdy $0<z<\tau a$, to jest ono równe: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_1^{*l}\left(\tau+\frac{z-a\tau}{a}\right)+o^{(l)}\left(\tau;\ z\right),$

gdy $a\tau<z<\alpha$, to jest ono równe: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_1^{*l}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right),$

gdy $\alpha<z<\alpha+a\tau$, to jest ono równe: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_1^{*l}\,\frac{\alpha-z+a\tau}{a}+o^{(l)}\left(\tau;\ \alpha,z\right),$

gdy z pozostałe, to jest ono równe: 0 .

Wzory na prawdopodobieństwo (6.12), (6.13), (6.18):

$$q_{ik}^{00l}\left(z,\alpha;\ \tau,t\right)-o_1^{(l)}\left(\tau\right) \tag{6.33}$$

przyjmują różne następujące postacie, w zależności od poziomu z .

Zatem, gdy $a\tau<z<a\tau+\alpha$, to jest ono równe: $\left(1-\pi_0^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau+o^{(l)}\left(\tau\right),$

gdy zaś z pozostałe, to wynosi: 0 .

Kolejne prawdopodobieństwo:

$$q_{kk}^{00l}\left(z,\alpha;\ \tau,t\right)-o_1^{(l)}\left(\tau\right) \tag{6.34}$$

jest równe, w zależności od poziomu z , jak poniżej:

gdy $a\tau<z<\alpha+a\tau$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_0^{*l}\tau\right)\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)+o^{(l)}\left(\tau\right),$

gdy zaś z pozostałe, to wynosi ono: 0 .

Dalsze prawdopodobieństwo:

$$q_{kk}^{11l}\left(z,\alpha;\ \tau,t\right)-o_1^{(l)}\left(\tau\right) \tag{6.35}$$

jest równe, w zależności od różnych przypadków, jak poniżej:

gdy $x_k>0,\ \ 0\le z<\alpha-\tau x_k$, to jest ono równe: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)+o^{(l)}\left(\tau\right),$

gdy $x_k>0,\ \ z$ pozostale , to jest ono równe: $0,$

gdy $x_k=0,\ \ 0<z<\alpha$, to jest ono równe: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)+o^{(l)}\left(\tau\right),$

gdy $x_k>0,\ \ z$ pozostale , to jest ono równe: $0,$

gdy $x_k<0,\ \ -\tau x_k<z<\alpha-\tau x_k$, to jest ono równe: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)+o^{(l)}\left(\tau\right),$

gdy $x_k<0,\ \ z$ pozostale , to jest ono równe: $0.$

Człony $o^{(l)}(\tau;\ldots),\ o_1^{(l)}(\tau)$ występujące we wzorach (6.21)-(6.35) są w otoczeniu $\tau=0$ wielkościami nieskończenie małymi rzędu wyższego niż τ .

Otrzymane zależności (6.21)-(6.35) zostaną wykorzystane w następnym paragrafie do uzyskania relacji, jakie spełniają funkcje gęstości $f_k^{ul}(z,t)$ w okresie T_l .

6.1.2. Gęstości rozkładów prawdopodobieństwa, a intensywności strukturalnego procesu zaopatrzenia podsystemu *M*.

W celu obliczenia prawdopodobieństw:

$$Q_k^{ul}(\alpha,t)$$

charakteryzujących funkcjonowanie systemu w okresie T_l i nieekstremalnym stanie poziomu zapasów magazynu *M* wyprowadzę równania, które są spełnione przez funkcje gęstości

$$f_k^{ul}(z,t) \text{ dla } t \in T_l .$$

Po zastosowaniu wzorów (6.6), (6.15) oraz relacji (6.21)-(6.35) dla $x_k > 0$, $t \in T_l$, $t+\tau \in T_l$, $0 < \alpha < V$, otrzymujemy (zob. analogia z (2.28)-(2.31)) następujące prawdopodobieństwa:

$$Q_k^{1l}(\alpha,t+\tau) = \int_0^{\alpha} f_k^{1l}(z,t+\tau)\,\mathrm{d}z = \tag{6.36}$$

$$= \sum_i \left\{ \int_0^V q_{ik}^{11l}(z,\alpha;\ \tau,t) f_i^{1l}(z,t)\,\mathrm{d}z + Q_i^{1l}(\{V\},t) q_{ik}^{11l}(V,\alpha;\ \tau,t) + Q_i^{1l}(\{0\},t) q_{ik}^{11l}(0,\alpha;\ \tau,t) \right\} +$$

$$+ \int_0^V q_{kk}^{01l}(z,\alpha;\ \tau,t) f_k^{0l}(z,t)\,\mathrm{d}z + Q_k^{0l}(\{V\},t) q_{kk}^{01l}(V,\alpha;\ \tau,t) + Q_k^{0l}(\{0\},t) q_{kk}^{01l}(0,\alpha;\ \tau,t) =$$

$$= A_{k,l}^{+1} + A_{k,l}^{01} + A_{k,l}^{-1},$$

Każdy z trzech składników sumy: $A_{k,l}^{+1}$, $A_{k,l}^{01}$ oraz $A_{k,l}^{-1}$ będzie poniżej oddzielnie zaprezentowany.

Zatem pierwszy składnik $A_{k,l}^{+1}$ wynosi:

$$A_{k,l}^{+1} = \tag{6.37}$$

$$= \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i \geq 0}} \left\{ \int_0^V q_{ik}^{11l}(z,\alpha;\ \tau,t) f_i^{1l}(z,t)\,\mathrm{d}z + Q_i^{1l}(\{0\},t) q_{ik}^{11l}(0,\alpha;\ \tau,t) + Q_i^{1l}(\{V\},t) q_{ik}^{11l}(V,\alpha;\ \tau,t) \right\} =$$

$$= \sum_{\substack{i\neq 0 \\ x_i > x_k}} \left\{ \int_0^{\alpha-\tau x_i} \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}(\tau) \right] f_i^{1l}(z,t)\,\mathrm{d}z + \int_{\alpha-\tau x_i}^{\alpha-\tau x_k} \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(1)} \frac{\alpha-z-\tau x_k}{x_i-x_k} + \right.\right.$$

$$\left. + o^{(l)}(\tau;\ \alpha,z) \right] f_{ik}^{1l}(z,t)\,\mathrm{d}z + \int_{\alpha-\tau x_k}^{V} o^{(l)}(\tau) f_i^{1l}(z,t)\,\mathrm{d}z + \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}(\tau) \right] Q_i^{1l}(\{0\},t) +$$

$$+ o^{(l)}(\tau) Q_i^{1l}(\{V\},t) \Big\} + \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i < x_k}} \left\{ \int_0^{\alpha-\tau x_k} \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}(\tau) \right] f_i^{1l}(z,t)\,\mathrm{d}z + \right.$$

$$+ \int_{\alpha-\tau x_k}^{\alpha-\tau x_i} \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau - \frac{\alpha-z-\tau x_k}{x_i-x_k}\right) + o^{(l)}(\tau;\ \alpha,z) \right] f_i^{1l}(z,t)\,\mathrm{d}z + o^{(l)}(\tau;\ \alpha,z) +$$

$$\left. + \int_{\alpha-\tau x_i}^{V} o^{(l)}(\tau) f_i^{1l}(z,t)\,\mathrm{d}z + \left[\left(1-\pi_i^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}(\tau) \right] Q_i^{1l}(\{0\},t) + o^{(l)}(\tau) Q_i^{1l}(\{V\},t) \right\},$$

drugi składnik sumy $A_{k,l}^{01}$ wynosi:

$$A_{k,l}^{01} = \tag{6.38}$$

$$= \int_0^V q_{kk}^{11l}(z,\alpha;\ \tau,t)\, f_k^{1l}(z,t)\,\mathrm{d}z + Q_k^{1l}(\{V\},t)\, q_{kk}^{11l}(V,\alpha;\ \tau,\mathrm{t}) +$$

$$+ Q_k^{1l}(\{0\},t)\, q_{kk}^{11l}(0,\alpha;\ \tau,t) + \int_0^V q_{kk}^{01l}(z,\alpha;\ \tau,t)\, f_k^{0l}(z,t)\,\mathrm{d}z +$$

$$+ Q_k^{0l}(\{V\},t)\, q_{kk}^{01l}(V,\alpha;\ \tau,t) + Q_k^{0l}(\{0\},t)\, q_{kk}^{01l}(0,\alpha;\ \tau,t) =$$

$$= \int_0^{\alpha-\tau x_k} \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right) + o^{(l)}(\tau)\right] f_k^{1l}(z,t)\,\mathrm{d}z +$$

$$+ \int_{\alpha-\tau x_k}^V o^{(l)}(\tau)\, f_k^{1l}(\mathrm{z},t)\,\mathrm{d}z + Q_k^{1l}(\{V\},t)\, o^{(l)}(\tau) + Q_k^{1l}(\{0\},t)\left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\left(1-\pi_k^{l}\tau\right) + o^{(l)}\tau\right] +$$

$$+ \int_0^{\tau a}\left[\left(1-\pi_l^{(l)}\tau\right)\pi_0^{*l}\,\tfrac{z}{a}\, f_k^{0l}(z,t) + o^{(l)}(\tau,z)\right] f_k^{0l}(z,t)\,\mathrm{d}z +$$

$$+ \int_{\tau a}^{\alpha-\tau x_k}\left[\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_0^{*l}\tau + o^{(l)}(\tau)\right] f_k^{0l}(z,t)\,\mathrm{d}z + \int_{\alpha+\tau a}^V o^{(l)}(\tau)\, f_k^{0l}(z,t)\,\mathrm{d}z +$$

$$+ \int_{\alpha-\tau x_k}^{\alpha+\tau a}\left[\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_0^{*l}\left(\tau + \frac{\alpha - z - \tau x_k}{a + x_k}\right) + o^{(l)}(\tau;\ \alpha, z)\right] f_k^{0l}(z,t)\,\mathrm{d}z +$$

$$+ Q_k^{0l}(\{V\},t)\, o^{(l)}(\tau;\ z) + Q_k^{0l}(\{0\},t)\, o^{(l)}(\tau),$$

zaś trzeci składnik $A_{k,l}^{-1}$ jest równy:

$$A_{k,l}^{-1} = \tag{6.39}$$

$$= \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i<0}} \left\{ \int_0^V q_{ik}^{11l}(z,\alpha;\ \tau,t)\, f_i^{1l}(z,t)\,\mathrm{d}z + Q_i^{1l}(\{V\},t)\, q_{ik}^{11l}(V,\alpha;\ \tau,t) + \right.$$

$$\left. Q_i^{1l}(\{0\},t)\, q_{ik}^{11l}(0,\alpha;\ \tau,t)\right\} = \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i<0}} \left\{ \int_0^{-\tau x_i}\left[\left(1-\tau\pi_1^{*l}\right)\pi_{ik}^{(l)}\frac{z}{-x_i} + o^{(l)}(\tau;\ z)\right] f_i^{1l}(z,t)\,\mathrm{d}z + \right.$$

$$+ \int_{-\tau x_i}^{\alpha-\tau x_k}\left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}\tau\right] f_i^{1l}(z,t)\,\mathrm{d}z +$$

$$+ \int_{\alpha-\tau x_k}^{\alpha-\tau x_i}\left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau - \frac{\alpha - z - \tau x_k}{x_i - x_k}\right) + o^{(l)}(\tau;\ \alpha, z)\right] f_i^{1l}(z,t)\,\mathrm{d}z +$$

$$\left. + \int_{\alpha-\tau x_i}^V o^{(l)}(\tau)\, f_i^{1l}(z,t)\,\mathrm{d}z\right\}.$$

Po obustronnym zróżniczkowaniu równości (6.36) względem α i uwzględnieniu przy tym relacji (6.37)-(6.39), otrzymujemy funkcję gęstości postaci:

$$f_k^{1l}(\alpha, t+\tau) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} A_{k,l}^{+1} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} A_{k,l}^{01} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} A_{k,l}^{-1}, \tag{6.40}$$

gdzie poszczególne składniki dadzą się przedstawić następująco:

składnik pierwszy $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} A_{k,l}^{+1}$ wynosi:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} A_{k,l}^{+1} =$$

$$= \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i > x_k}} \left\{ \frac{1-\pi_1^{*l}\tau}{x_i - x_k} \int_{\alpha-\tau x_i}^{\alpha-\tau x_k} f_i^{1l}(z,t)\,\mathrm{d}z + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_{\alpha-\tau x_i}^{\alpha-\tau x_k} o^{(l)}(\tau;\ \alpha, z) f_i^{1l}(z,t)\,\mathrm{d}z + \right.$$

$$+ \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}(\tau) \right] f_i^{1l}(\alpha-\tau x_i,\ t) - o^{(l)}(\tau) f_i^{1l}(\alpha-\tau x_k,\ t) -$$

$$\left. - \left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau f_i^{1l}(\alpha-\tau x_i,\ t) \right\} + \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i < x_k}} \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_{\alpha-\tau x_k}^{\alpha-\tau x_i} o^{(l)}(\tau;\ \alpha, z) f_i^{1l}(z,t)\,\mathrm{d}z - \right.$$

$$- \frac{1-\pi_1^{*l}\tau}{x_i - x_k} \pi_{ik}^{(l)} \int_{\alpha-\tau x_k}^{\alpha-\tau x_i} f_i^{1l}(z,t)\,\mathrm{d}z - o^{(l)}(\tau) f_i^{1l}(\alpha-\tau x_i,\ t) -$$

$$\left. - \left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau f_i^{1l}(\alpha-\tau x_k,\ t) + \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}(\tau) \right] f_k^{1l}(\alpha-\tau x_k,\ t) \right\},$$

składnik drugi $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} A_{k,l}^{01}$ wynosi:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} A_{k,l}^{01} =$$

$$= \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\left(1-\pi_k^{(l)}\right) + o^{(l)}(\tau) \right] f_k^{1l}(\alpha-\tau x_k,\ t) -$$

$$- o^{(l)}(\tau) f_k^{1l}(\alpha-\tau x_k,\ t) + \left[\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_0^{*l}\tau + o^{(l)}(\tau) \right] f_k^{0l}(\alpha-\tau x_k,\ t),$$

składnik trzeci $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} A_{k,l}^{-1}$ wynosi:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} A_{k,l}^{-1} =$$

$$= \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i < 0}} \left\{ \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}(\tau) \right] f_i^{1l}(\alpha-\tau x_k,\ t) - \right.$$

$$- o^{(l)}(\tau) f_i^{1l}(\alpha-\tau x_i,\ t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_{\alpha-\tau x_k}^{\alpha-\tau x_i} o^{(l)}(\tau;\ \alpha, z) f_i^{1l}(z,t)\,\mathrm{d}z -$$

$$\left. - \frac{1-\pi_1^{*l}\tau}{x_i - x_k} \pi_{ik}^{(l)} \int_{\alpha-\tau x_k}^{\alpha-\tau x_i} f_i^{1l}(z,t)\,dz - \left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau f_i^{1l}(\alpha-\tau x_k,\ t) \right\}.$$

Funkcje gęstości $f_k^{1l}(\alpha-\tau x_k, t)$, $f_k^{0l}(\alpha-\tau x_k, t)$, występujące w poszczególnych składnikach relacji (6.40), rozwińmy według wzoru Taylora do wyrazu rzędu drugiego, następnie, po przeniesieniu elementu $f_k^{1l}(\alpha,t)$ na lewą stronę wzoru (6.40) i po podzieleniu stronami otrzymaną równość przez τ i przejściu do granicy przy $\tau \to 0$, otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych, który w różnych przypadkach jest poniżej przedstawiony.

W wyniku tych operacji otrzymujemy następujący układ równań:

$$\frac{\partial f_k^{1l}(\alpha,t)}{\partial t} = \\ = -x_k \frac{\partial f_k^{1l}(\alpha,t)}{\partial \alpha} - \left(\pi_k^{(l)} + \pi_1^{*l}\right) f_k^{1l}(\alpha,t) + \sum_{i\neq k} \pi_{ik}^{(l)} f_i^{1l}(\alpha,t) + \pi_0^{*l} f_k^{0l}(\alpha,t). \\ \text{dla } 0<\alpha<V,\ \ t\in T_l,\ \ k=1,2,...,n \tag{6.41}$$

Podobnie wyprowadza się relację (6.41) dla $x_k \le 0$.

Analogiczne można uzyskać związki, które spełniają funkcje gęstości $f_k^{0l}(\alpha,t)$.

Zatem dla nieekstremalnego poziomu zapasów $z(t)$ funkcje gęstości: $f_k^{1l}(z,t)$, $f_k^{0l}(z,t)$, spełniają następujący układ równań różniczkowych postaci:

$$\frac{\partial f_k^{1l}(z,t)}{\partial t} = \\ = -x_k \frac{\partial f_k^{1l}(z,t)}{\partial z} - \left(\pi_k^{(l)} + \pi_1^{*l}\right) f_k^{1l}(z,t) + \sum_{i\neq k} \pi_{ik}^{(l)} f_i^{1l}(z,t) + \pi_0^{*l} f_k^{0l}(z,t) \\ \text{dla } 0<z<V,\ \ t\in T_l,\ \ k=1,2,...,n \tag{6.42}$$

$$\frac{\partial f_k^{0l}(z,t)}{\partial t} = \\ = a\frac{\partial f_k^{0l}(z,t)}{\partial z} - \left(\pi_k^{(l)} + \pi_0^{*l}\right) f_k^{0l}(z,t) + \sum_{i\neq k} \pi_{ik}^{(l)} f_i^{0l}(z,t) + \pi_1^{*l} f_k^{1l}(z,t). \\ \text{dla } 0<z<V,\ \ t\in T_l,\ \ k=1,2,...,n \tag{6.43}$$

Związki (6.42), (6.43) zostaną wykorzystane, między innymi, do opisu funkcjonowania rozważanego systemu w okresie T_l (dla $l=1,2,\ldots,m$).

6.2. Stan graniczny dolny poziomu zapasów.

Funkcjonowanie badanego systemu w przypadku, gdy poziom zapasów $z(t)$ produktu w podsystemie *M* spełnia następujący warunek:

$$z(t)=0$$

czyli osiąga stan graniczny dolny, opiszę za pomocą prawdopodobieństw następującej postaci:

$$Q_k^{ul}(\{0\},t) = P\left(z(t)=0,\ \ x(t)=x_k,\ \ v(t)=u\right). \tag{6.44}$$

dla $t\in T_l$, $u=1$ lub $u=0$

Prawdopodobieństwa $Q_k^{ul}(\{0\},t)$ spełniają następujące związki (analogiczne do relacji (2.36)-(2.38)), w zależności od poziomu u ($u=1$ lub $u=0$).

Dla $u=1$ mamy:

$$Q_k^{ul}(\{0\},t+\tau) = P\left(z(t+\tau)=0,\ \ x(t+\tau)=x_k,\ \ v(t+\tau)=1\right) = \\ \sum_i^V \int_0 q_{ik}^{11l}(z,\{0\};\ \tau,t) Q_i^{1l}(\mathrm{d}z,t) + \int_0^V q_{kk}^{01l}(z,\{0\};\ \tau,t) Q_k^{0l}(\mathrm{d}z,t), \tag{6.45}$$

gdzie podcałkowe prawdopodobieństwa warunkowe są następujące:

$$q_{ik}^{11l}(z,\{0\};\tau,t)=P\big(x(t)\text{ ma jeden skok w }\ t+\theta\in(t,t+\tau),\ v(s)=1\text{ dla}$$
$$s\in[t,t+\tau],\ h(z+\theta x_i)-(\tau-\theta)x_k\le 0\mid x(t)=x_i,\ v(t)=1\big)+o_1^{(l)}(\tau);\qquad(6.46)$$
$$i\neq k,\ z=z(t)\in[0,V],\ t\in T_l,\ t+\tau\in T_l,$$

$$q_{kk}^{11l}(z,\{0\};\tau,t)=P\big(x(s)=x_k,\ v(s)=1\text{ dla }\ s\in[t,t+\tau],$$
$$z+\tau x_k\le 0\mid x(t)=x_k,\ v(t)=1\big)+o_1^{(l)}(\tau);\qquad(6.47)$$
$$z=z(t)\in[0,V],\ t\in T_l,\ t+\tau\in T_l,$$

$$q_{kk}^{01l}(z,\{0\};\tau,t)=P\big(x(s)=x_k,\ \text{dla }\ s\in[t,t+\tau],$$
$$v(t)\text{ ma jeden skok w }\ t+\theta\in(t,t+\tau),$$
$$h(z-a\theta)+x_k(\tau-\theta)\le 0\mid x(t)=x_k,\ v(t)=0\big)+o_1^{(l)}(\tau);\qquad(6.48)$$
$$z=z(t)\in[0,V],\ t\in T_l,\ t+\tau\in T_l,$$

zaś dla $u=0$ mamy:

$$Q_k^{0l}\big(\{0\},t+\tau\big)=P\big(z(t+\tau)=0,\ \ x(t+\tau)=x_k,\ \ v(t+\tau)=0\big)=$$
$$\sum_i\int_0^V q_{ik}^{00l}\big(z,\{0\};\ \tau,t\big)Q_i^{0l}(\mathrm{d}z,t)+\int_0^V q_{kk}^{10l}\big(z,\{0\};\ \tau,t\big)Q_k^{1l}(\mathrm{d}z,t),\qquad(6.49)$$

gdzie podcałkowe prawdopodobieństwa warunkowe są następujące:

$$q_{ik}^{00l}(z,\{0\};\tau,t)=P\big(x(t)\text{ ma jeden skok w }\ t+\theta\in(t,t+\tau),\ v(s)=0\text{ dla}$$
$$s\in[t,t+\tau],\ z-a\tau\le 0\mid x(t)=x_i,\ v(t)=0\big)+o_1^{(l)}(\tau);\qquad(6.50)$$
$$i\neq k,\ z=z(t)\in[0,V],\ t\in T_l,\ t+\tau\in T_l,$$

$$q_{kk}^{00l}(z,\{0\};\tau,t)=P\big(x(s)=x_k,\ s\in[t,t+\tau],\ v(s)=0\ \text{dla }\ s\in[t,t+\tau],$$
$$z-a\tau\le 0\mid x(t)=x_k,\ v(t)=0\big)+o_1^{(l)}(\tau);\qquad(6.51)$$
$$z=z(t)\in[0,V],\ t\in T_l,\ t+\tau\in T_l,$$

$$q_{kk}^{10l}(z,\{0\};\tau,t)=P\big(x(s)=x_k,\ \text{dla }\ s\in[t,t+\tau],$$
$$v(t)\text{ ma jeden skok w }\ t+\theta\in(t,t+\tau),$$
$$h(z+x_k\theta)-a(\tau-\theta)\le 0\mid x(t)=x_k,\ v(t)=1\big)+o_1^{(l)}(\tau);\qquad(6.52)$$
$$z=z(t)\in[0,V],\ t\in T_l,\ t+\tau\in T_l.$$

W celu wyznaczenia prawdopodobieństw (6.45), (6.49) opisujących funkcjonowanie systemu w przypadku, gdy poziom zapasów w magazynie osiąga stan graniczny dolny, wyznaczymy *explicite* wzory dla prawdopodobieństw warunkowych (6.46)-(6.48) oraz (6.50)-(6.52). Otrzymamy je analogicznie jak relacje (2.41)-(2.48).

6.2.1. Prawdopodobieństwa warunkowe w przypadku dolnego stanu granicznego.

Ze wzorów (2.6), (6.9) otrzymujemy prawdopodobieństwa warunkowe:

$$q_{ik}^{11l}\left(z,\{0\};\ \tau,t\right)=$$
$$=\exp\left(-\pi_1^{*l}\tau\right)\int_A\frac{\pi_{ik}^{(l)}\tau}{\pi_i^{(l)}\tau}\mathrm{d}\left(1-\exp\left(-\pi_i^{(l)}\theta\right)\right)+o_1^{(l)}(\tau), \tag{6.53}$$

gdzie zbiór A, po którym się całkuje ma postać następującą:

$$A=\left\{\theta:\ \ 0<\theta<\tau,\ h\left(z+\theta x_i\right)+\left(\tau-\theta\right)x_k\le 0\right\},$$
$$i\ne k,\ \ z=z(t)\in\left[0,V\right],\ \ t\in T_l,\ \ t+\tau\in T_l.$$

Jeżeli $x_i>0$, $x_k<0$, $t\in T_l$, $t+\tau\in T_l$, τ małe, $0<\theta<\tau$, to zbiór A jest następujący:

$$\left\{\theta:\ \ h\left(z+\theta x_i\right)+\left(\tau-\theta\right)x_k\le 0\right\}=$$
$$=\left\{\theta:\ \ z+\theta x_i+\left(\tau-\theta\right)x_k\le 0\right\}\cap\left\{\theta:\ \ z+\theta x_i<V\right\}$$

i może być równy, w zależności od różnych poziomów z, jak poniżej:

gdy $z<-\tau x_k$, to zbiór A jest równy:

$$\left\{\theta:\ \ 0\le\theta\le\frac{-z-\tau x_k}{x_i-x_k}\right\}\cap\left\{\theta:\ \ \theta<\frac{V-z}{x_i}\right\},$$

gdy z pozostałe, to zbiór A jest równy: $\varnothing$.

Zatem zbiór A ma różną postać, w zależności od poziomu z, jak poniżej:

gdy $0\le z<-\tau x_k$, to zbiór A jest równy:

$$A=\left\{\theta:\ \ 0\le\theta\le\frac{z+\tau x_k}{x_k-x_i}\right\}, \tag{6.54}$$

gdy z pozostałe, to zbiór A jest równy: $A=\varnothing$.

Uwzględniając we wzorze (6.53) zbiór A, określony równością (6.54), otrzymujemy różne postacie poniższych prawdopodobieństw:

$$q_{ik}^{11l}\left(z,\{0\};\ \tau,t\right)-o_1^{(l)}(\tau), \tag{6.55}$$

a więc, w zależności od różnych poziomów z, mogą być równe, jak poniżej:

gdy $0\le z<-\tau x_k$, to wynoszą one: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\dfrac{z+\tau x_k}{x_k-x_i}+o^{(l)}(\tau;\ z)$,

gdy z pozostałe, to są równe: 0.

Dla $x_i=0$, $x_k<0$ wzór (6.55) uzyskuje się podobnie.

Analogiczne można obliczyć prawdopodobieństwa (6.46)-(6.48), (6.50)-(6.52) dla $t\in T_l$, $t+\tau\in T_l$ w pozostałych przypadkach. Wyrażają się one następującymi wzorami (będącymi odpowiednikami relacji (2.41)-(2.48)) w zależności od poziomów wielkości x_i oraz x_k.

Dla $x_i<0$, $x_k=0$ poniższe prawdopodobieństwo:

$$q_{ik}^{11l}\left(z,\{0\};\ \tau,t\right)-o_1^{(l)}(\tau) \tag{6.56}$$

jest równe, w zależności od poziomów z, jak poniżej:

gdy $0\le z<-\tau x_i$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\left(z+\dfrac{z}{x_i}\right)+o^{(l)}(\tau;\ z)$,

gdy z pozostałe, to wynosi ono: 0.

Dla $x_i<0$, $x_k<0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{ik}^{11l}\left(z,\{0\};\ \tau,t\right)-o_1^{(l)}(\tau) \tag{6.57}$$

jest równe, w różnych przypadkach, jak poniżej:

gdy $x_i - x_k > 0, \quad -\tau x_i < z < -\tau x_k$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\dfrac{z+\tau x_k}{x_k - x_i} + o^{(l)}(\tau;\, z)$,

gdy $x_i - x_k > 0, \quad 0 \le z < -\tau x_i$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}(\tau)$,

gdy $x_i - x_k > 0, \quad z$ pozostale, to wynosi ono: 0,

gdy $x_i - x_k < 0, \quad 0 \le z < -\tau x_k$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}(\tau)$,

gdy $x_i - x_k < 0, \quad -\tau x_k < z < -\tau x_i$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau - \dfrac{z+\tau x_k}{x_k - x_i}\right) + o^{(l)}(\tau;\, z)$,

gdy $x_i - x_k < 0, \quad z$ pozostale, to wynosi ono: 0.

Dla $x_k > 0$, x_i - dowolne oraz $0 \le z \le V$, prawdopodobieństwo spełnia następującą równość:

$$q_{ik}^{11l}\left(z, \{0\};\ \tau, t\right) = o_1^{(l)}(\tau); \tag{6.58}$$

I dalej, dla x_k, x_i dowolnych poniższe prawdopodobieństwo:

$$q_{ik}^{00l}\left(z, \{0\};\ \tau, t\right) - o_1^{(l)}(\tau) \tag{6.59}$$

jest równe, w zależności od poziomu z, jak poniżej:

gdy $0 \le z < a\tau$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_0^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}(\tau)$,

gdy z pozostałe, to wynosi ono: 0.

Kolejne prawdopodobieństwo:

$$q_{kk}^{00l}\left(z, \{0\};\ \tau, t\right) - o_1^{(l)}(\tau) \tag{6.60}$$

jest równe, w zależności od poziomu z, jak poniżej:

gdy $0 \le z < a\tau$, to jest ono równe: $\left(1-\pi_0^{*l}\tau\right)\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right) + o^{(l)}(\tau)$,

gdy z pozostałe, to jest ono równe: 0.

Z kolei dla $x_k < 0$ prawdopodobieństwo:

$$q_{kk}^{10l}\left(z, \{0\};\ \tau, t\right) - o_1^{(l)}(\tau) \tag{6.61}$$

jest równe, w zależności od poziomu sumy $a + x_k$ oraz wartości z, jak poniżej:

gdy $a + x_k \le 0, \quad 0 \le z < a\tau$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_1^{*l}\tau + o^{(l)}(\tau)$,

gdy $a + x_k \le 0, \quad z$ pozostale, to wynosi ono: 0,

gdy $a + x_k > 0, \quad 0 \le z < -x_k\tau$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_1^{*l}\tau + o^{(l)}(\tau)$,

gdy $a + x_k > 0, \quad -x_k\tau < z < a\tau$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_1^{*l}\dfrac{\tau a - z}{a + x_k} + o^{(l)}(\tau;\, z)$,

gdy $a + x_k > 0, \quad z$ pozostale, to wynosi ono: 0.

Dla $x_k > 0$ poniższe prawdopodobieństwo:

$$q_{kk}^{10l}\left(z, \{0\};\ \tau, t\right) - o_1^{(l)}(\tau) \tag{6.62}$$

jest równe, w zależności od poziomu z, jak poniżej:

gdy $0 \le z < a\tau$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_k^{*l}\tau\right)\pi_1^{*l}\dfrac{a\tau - z}{x_k + a} + o^{(l)}(\tau;\, z)$,

gdy z pozostałe, to wynosi ono: 0.

Dla $x_k = 0$ kolejne prawdopodobieństwo:

$$q_{kk}^{10l}\left(z, \{0\};\ \tau, t\right) - o_1^{(l)}(\tau) \tag{6.63}$$

jest równe. w zależności od poziomu z, jak poniżej:

gdy $0 \le z < a\tau$, to jest ono równe: $\left(1-\pi_k^{*l}\tau\right)\pi_1^{*l}\,\dfrac{a\tau - z}{a} + o^{(l)}\left(\tau;\, z\right)$,

gdy z pozostałe, to jest ono równe: 0.

Dla $x_k > 0$ oraz $0 \le z \le V$ poniższe prawdopodobieństwo wynosi:

$$q_{kk}^{11l}\left(z,\{0\};\ \tau,t\right) = o_1^{(l)}\left(\tau\right); \tag{6.64}$$

Dla $x_k \le 0$ poniższe prawdopodobieństwo:

$$q_{kk}^{11l}\left(z,\{0\};\ \tau,t\right) - o_1^{(l)}\left(\tau\right) \tag{6.65}$$

jest równe, w zależności od poziomów z, jak poniżej:

gdy $0 \le z < -\tau x_k$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right) + o^{(l)}\left(\tau\right)$,

gdy z pozostałe, to wynosi ono: 0.

Zaś dla $x_k > 0$ oraz $0 \le z \le V$ prawdopodobieństwo to spełnia następujący warunek:

$$q_{kk}^{01l}\left(z,\{0\};\ \tau,t\right) - o_1^{(l)}\left(\tau\right) = 0; \tag{6.66}$$

Dalej dla $x_k = 0$ następujące prawdopodobieństwo:

$$q_{kk}^{01l}\left(z,\{0\};\ \tau,t\right) - o_1^{(l)}\left(\tau\right) \tag{6.67}$$

jest równe, w zależności od poziomu z, jak poniżej:

gdy $0 \le z < \tau a$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_0^{*l}\left(\tau - \dfrac{z}{a}\right) + o^{(l)}\left(\tau;\, z\right)$,

gdy z pozostałe, to wynosi ono: 0.

Dla $x_k < 0$ prawdopodobieństwo to:

$$q_{kk}^{01l}\left(z,\{0\};\ \tau,t\right) - o_1^{(l)}\left(\tau\right) \tag{6.68}$$

jest równe, w zależności od poziomu sumy $a + x_k$ oraz z, jak poniżej:

gdy $a + x_k \le 0,\ \ 0 \le z < a\tau$, to jest ono równe: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_0^{*l}\tau + o^{(l)}\left(\tau\right)$,

gdy $a + x_k \le 0,\ \ z$ pozostale, to jest ono równe: 0,

gdy $a + x_k > 0,\ \ 0 \le z < -x_k\tau$, to jest ono równe: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_0^{*l}\tau + o^{(l)}\left(\tau\right)$,

gdy $a + x_k > 0,\ \ -x_k\tau < z < \tau a$, to jest ono równe: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_0^{*l}\left(\tau - \dfrac{z + \tau x_k}{a + x_k}\right) + o^{(l)}\left(\tau;\, z\right)$,

gdy $a + x_k > 0,\ \ z$ pozostale, to jest ono równe: 0.

Składniki $o^{(l)}(\tau;\ldots)$, $o_1^{(l)}(\tau)$ występujące we wzorach (6.55)-(6.68) są w otoczeniu $\tau = 0$ wielkościami nieskończenie małymi rzędu wyższego niż τ.

Związki (6.55)-(6.68) wykorzystam w następnym paragrafie do uzyskania relacji, jakie spełniają prawdopodobieństwa (6.44) opisujące funkcjonowanie badanego systemu w okresie T_l w przypadku, gdy poziom zasobów osiąga stan graniczny dolny.

6.2.2. Stan graniczny dolny, a intensywności strukturalnego procesu zaopatrzenia podsystemu *M*.

Celem obliczenia następujących prawdopodobieństw:

$$Q_k^{ul}\left(\{0\},t\right),\ t \in T_l,$$

wyprowadzone będą równania, które one spełniają w okresie T_l.

W wyniku zastosowania wzoru (6.45) oraz zależności (6.55)-(6.68) dla $-a < x_k < 0$, $t \in T_l$, $t+\tau \in T_l$ otrzymujemy (zob. analogia z (2.49)) następujące prawdopodobieństwa:

$$
\begin{aligned}
&Q_k^{1l}\left(\{0\},t+\tau\right)= \\
&=\sum_i\left\{\int_0^V q_{ik}^{11l}\left(z,\{0\};\ \tau,t\right)f_i^{1l}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+\right. \\
&+Q_i^{1l}\left(\{0\},t\right)q_{ik}^{11l}\left(0,\{0\};\ \tau,t\right)+Q_i^{1l}\left(\{V\},t\right)q_{ik}^{11l}\left(V,\{0\};\ \tau,t\right)\Big\}+ \\
&+\int_0^V q_{kk}^{01l}\left(z,\{0\};\ \tau,t\right)f_k^{0l}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+Q_k^{0l}\left(\{0\},t\right)q_{kk}^{01l}\left(0,\{0\};\ \tau,t\right)+ \\
&+Q_k^{0l}\left(\{V\},t\right)q_{kk}^{01l}\left(V,\{0\};\ \tau,t\right)= \\
&=A_{k,l}^{+1}+A_{k,l}^{01}+A_{k,l}^{-1},
\end{aligned}
\tag{6.69}
$$

Każdy z trzech składników sumy: $A_{k,l}^{+1}$, $A_{k,l}^{01}$ oraz $A_{k,l}^{-1}$ będzie następująco przedstawiony.

Pierwszy składnik wynosi $A_{k,l}^{+1}$:

$$
\begin{aligned}
&A_{k,l}^{+1}= \\
&=\sum_{\substack{i\neq k\\ x_i\geq 0}}\left\{\int_0^V q_{ik}^{11l}\left(z,\{0\};\ \tau,t\right)f_i^{1l}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+Q_i^{1l}\left(\{0\},t\right)q_{ik}^{11l}\left(0,\{0\};\ \tau,\mathrm{t}\right)+\right. \\
&\left.+Q_i^{1l}\left(\{V\},t\right)q_{ik}^{11l}\left(V,\{0\};\ \tau,t\right)\right\}= \\
&=\sum_{\substack{i\neq k\\ x_i\geq 0}}\left\{\int_0^{-\tau x_k}\left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\frac{z+\tau x_k}{x_k-x_i}\right]f_i^{1l}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+\int_0^V o^{(l)}\left(\tau\right)f_i^{1l}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+\right. \\
&\left.+Q_i^{1l}\left(\{0\},t\right)\left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau\frac{x_k}{x_k-x_i}+o^{(l)}\left(\tau\right)\right]+Q_i^{1l}\left(\{V\},t\right)o^{(l)}\left(\tau\right)\right\},
\end{aligned}
$$

kolejny, drugi składnik $A_{k,l}^{01}$ wynosi:

$$A_{k,l}^{01} =$$

$$= \int_0^V q_{kk}^{11l}\left(z,\{0\};\ \tau,t\right) f_k^{1l}\left(z,t\right)\mathrm{d}z + Q_k^{1l}\left(\{V\},t\right) q_{kk}^{11l}\left(V,\{0\};\ \tau,t\right) +$$

$$+ Q_k^{1l}\left(\{0\},t\right) q_{kk}^{11l}\left(0,\{0\};\ \tau,t\right) + \int_0^V q_{kk}^{01l}\left(z,\{0\};\ \tau,t\right) f_k^{0l}\left(z,t\right)\mathrm{d}z +$$

$$+ Q_k^{0l}\left(\{V\},t\right) q_{kk}^{01l}\left(V,\{0\};\ \tau,t\right) + Q_k^{0l}\left(\{0\},t\right) q_{kk}^{01l}\left(0,\{0\};\ \tau,t\right) =$$

$$= \int_0^{-\tau x_k} \left[\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right) + o^{(l)}\left(\tau\right)\right] f_k^{1l}\left(z,t\right)\mathrm{d}z + \int_{-\tau x_k}^V o^{(l)}\left(\tau\right) f_k^{1l}\left(z,t\right)\mathrm{d}z +$$

$$+ \left[\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right) + o^{(l)}\left(\tau\right)\right] Q_k^{1l}\left(\{0\},t\right) + o^{(l)}\left(\tau\right) Q_k^{1l}\left(\{V\},t\right) +$$

$$+ \int_0^{-\tau x_k} \left[\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_0^{*l}\tau + o^{(l)}\left(\tau\right)\right] f_k^{0l}\left(z,t\right)\mathrm{d}z +$$

$$+ \int_{-\tau x_k}^{\tau a} \left[\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_0^{*l}\left(\tau - \tfrac{z+\tau x_k}{x_k+a}\right) + o^{(l)}\left(\tau;\ z\right)\right] f_k^{0l}\left(z,t\right)\mathrm{d}z +$$

$$+ \int_{\tau a}^V o^{(l)}\left(\tau\right) f_k^{0l}\left(z,t\right) dz + o^{(l)}\left(\tau\right) Q_k^{0l}\left(\{V\},t\right) + Q_k^{0l}\left(\{0\},t\right)\left[\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_0^{*l}\tau + o^{(l)}\left(\tau\right)\right],$$

trzeci zaś składnik $A_{k,l}^{-1}$ jest równy:

$$A_{k,l}^{-1} =$$

$$= \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i<0}} \left\{ \int_0^V q_{ik}^{11l}\left(z,\{0\};\ \tau,t\right) f_i^{1l}\left(z,t\right)\mathrm{d}z + Q_i^{1l}\left(\{0\},t\right) q_{ik}^{11l}\left(0,\{0\};\ \tau,t\right) +\right.$$

$$\left. + Q_i^{1l}\left(\{V\},t\right) q_{ik}^{11l}\left(V,\{0\};\ \tau,t\right)\right\} = \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i\geq x_k}} \left\{ \int_0^{-\tau x_i} \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}\left(\tau\right)\right] f_i^{1l}\left(z,t\right)\mathrm{d}z +\right.$$

$$+ \int_{-\tau x_k}^{-\tau x_i} \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\frac{z+\tau x_k}{x_k-x_i} + o^{(l)}\left(\tau;\ z\right)\right] f_i^{1l}\left(z,t\right)\mathrm{d}z + \int_{-\tau x_k}^V o^{(l)}\left(\tau\right) f_i^{1l}\left(z,t\right)\mathrm{d}z +$$

$$+ Q_i^{1l}\left(\{0\},t\right)\left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}\left(\tau\right)\right] + o^{(l)}\left(\tau\right) Q_i^{1l}\left(\{V\},t\right)\Big\} +$$

$$+ \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i<x_k}} \left\{ \int_0^{-\tau x_k} \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}\left(\tau\right)\right] f_i^{1l}\left(z,t\right)\mathrm{d}z +\right.$$

$$+ \int_{-\tau x_k}^{-\tau x_i} \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau - \frac{z+\tau x_k}{x_k-x_i}\right) + o^{(l)}\left(\tau;\ z\right)\right] f_i^{1l}\left(z,t\right)\mathrm{d}z +$$

$$+ \int_{-\tau x_i}^V o^{(l)}\left(\tau\right) f_i^{1l}\left(z,t\right)\mathrm{d}z + Q_i^{1l}\left(\{0\},t\right)\left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}\left(\tau\right)\right] +$$

$$\left. + o^{(l)}\left(\tau\right) Q_i^{1l}\left(\{V\},t\right)\right\}.$$

Przenieśmy teraz na lewą stronę wzoru (6.69) wielkość $Q_k^{1l}\left(\{0\},t\right)$. Po obustronnym podzieleniu otrzymanej równości przez τ i przejściu do granicy przy $\tau \to 0$ otrzymujemy następujące pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial Q_k^{1l}\left(\{0\},t\right)}{\partial t} =$$

$$= \pi_0^{*l} Q_k^{0l}\left(\{0\},t\right) - \left(\pi_k^{(l)} + \pi_1^{*l}\right) Q_k^{1l}\left(\{0\},t\right) - x_k f_k^{1l}\left(0,t\right) + \tag{6.70}$$

$$+ \sum_{\substack{i \neq k \\ x_i < 0}} Q_i^{1l}\left(\{0\},t\right)\pi_{ik}^{(l)} + \sum_{\substack{i \neq k \\ x_i \geq 0}} \frac{x_k}{x_k - x_i} Q_i^{1l}\left(\{0\},t\right)\pi_{ik}^{(l)}.$$

Ponieważ występujące w powyższym wzorze składnik dla $x_i > 0$ spełniają następujący warunek:

$$Q_i^{1l}\left(\{0\},t\right) = 0$$

zatem wzór (6.70) można zapisać w prostszej postaci.

Dla $x_k + a \leq 0$ i $x_k = 0$ relację (6.70) otrzymuje się podobnie. Analogiczne wyprowadza się odpowiednik związku (6.70) dla prawdopodobieństw $Q_k^{0l}\left(\{0\},t\right)$.

Funkcjonowanie badanego systemu w przypadku, gdy poziom zapasów w *M* osiąga stan graniczny dolny, opisane jest zatem prawdopodobieństwami $Q_k^{ul}\left(\{0\},t\right)$ spełniającymi następujący układ równań różniczkowych:

$$\frac{\partial Q_k^{1l}\left(\{0\},t\right)}{\partial t} =$$

$$= \pi_0^{*l} Q_k^{0l}\left(\{0\},t\right) - \left(\pi_k^{(l)} + \pi_1^{*l}\right) Q_k^{1l}\left(\{0\},t\right) - x_k f_k^{1l}\left(0,t\right) + \tag{6.71}$$

$$+ \sum_{\substack{i \neq k \\ x_i \leq 0}} Q_i^{1l}\left(\{0\},t\right)\pi_{ik}^{(l)}, \quad x_k \leq 0, \quad t \in T_l,$$

$$Q_k^{1l}\left(\{0\},t\right) = 0, \quad x_k > 0, \quad t \in T_l, \tag{6.72}$$

$$\frac{\partial Q_k^{0l}\left(\{0\},t\right)}{\partial t} =$$

$$= \pi_1^{*l} Q_k^{1l}\left(\{0\},t\right) - \left(\pi_k^{(l)} + \pi_0^{*l}\right) Q_k^{0l}\left(\{0\},t\right) + a f_k^{0l}\left(0,t\right) + \tag{6.73}$$

$$+ \sum_{i \neq k} Q_i^{0l}\left(\{0\},t\right)\pi_{ik}^{(l)}, \quad k \in 1,2,\ldots,n, \quad t \in T_l.$$

Związki te zostaną wykorzystane, między innymi, do opisu działania badanego systemu gospodarowania zapasami w okresie T_l.

6.3. Stan graniczny górny poziomu zapasów.

Funkcjonowanie badanego systemu w przypadku, gdy poziom zapasów produktu w podsystemie *M* spełnia warunek:

$$z\left(t\right) = V$$

czyli osiąga stan graniczny dolny, opiszemy za pomocą prawdopodobieństw następującej postaci:

$$Q_k^{ul}\left(\{V\},t\right) = P\left(z\left(t\right) = V,\ x\left(t\right) = x_k,\ v\left(t\right) = u\right). \tag{6.74}$$

dla $t \in T_l$, $u = 1$ lub $u = 0$

Prawdopodobieństwa $Q_k^{ul}\left(\{V\},t\right)$ spełniają następujące związku (analogicznie do relacji (2.55)-(2.57)) w zależności od poziomu u ($u=1$ lub $u=0$).

Dla $u=1$, mamy:

$$Q_k^{1l}\left(\{V\},t+\tau\right)=P\left(z\left(t+\tau\right)=V,\ x\left(t+\tau\right)=x_k,\ v\left(t\right)=1\right)=$$
$$=\sum_i\int_0^V q_{ik}^{11l}\left(z,\{V\};\tau,t\right)Q_i^{1l}\left(\mathrm{d}z,t\right)+\int_0^V q_{kk}^{01l}\left(z,\{V\};\tau,t\right)Q_k^{0l}\left(\mathrm{d}z,t\right), \tag{6.75}$$

gdzie podcałkowe prawdopodobieństwa warunkowe są następujące:

$$q_{ik}^{11l}\left(z,\{V\};\tau,t\right)=P\left(x\left(t\right)\text{ ma jeden skok w }t+\theta\in\left(t,t+\tau\right),\right.$$
$$v\left(s\right)=1\text{ dla }s\in\left[t,t+\tau\right],\ h\left(z+\theta x_i\right)+x_k\left(\tau-\theta\right)\geq V\mid \tag{6.76}$$
$$\left.\mid x\left(t\right)=x_i,\ v\left(t\right)=1\right)+o_1^{(l)}\left(\tau\right);\ i\neq k,\ z=z\left(t\right)\in\left[0,V\right],\ t\in T_l,\ t+\tau\in T_l,$$

$$q_{kk}^{11l}\left(z,\{V\};\tau,t\right)=P\left(x\left(s\right)=x_k,\ v\left(s\right)=1\text{ dla }s\in\left[t,t+\tau\right],\right.$$
$$\left.z+x_k\tau\geq V\mid x\left(t\right)=x_k,\ v\left(t\right)=1\right)+o_1^{(l)}\left(\tau\right);\ z=z\left(t\right)\in\left[0,V\right],\ t\in T_l,\ t+\tau\in T_l, \tag{6.77}$$

$$q_{kk}^{01l}\left(z,\{V\};\tau,t\right)=P\left(x\left(s\right)=x_k\text{ dla }s\in\left[t,t+\tau\right],\right.$$
$$v\left(t\right)\text{ ma jeden skok w }t+\theta\in\left(t,t+\tau\right),\ h\left(z-a\theta\right)+x_k\left(\tau-\theta\right)\geq V\mid \tag{6.78}$$
$$\left.\mid x\left(t\right)=x_k,\ v\left(t\right)=0\right)+o_1^{(l)}\left(\tau\right);\ z=z\left(t\right)\in\left[0,V\right],\ t\in T_l,\ t+\tau\in T_l,$$

Zaś dla $u=0$ mamy:

$$Q_k^{0l}\left(\{V\},t\right)=0,\ k=1,2,\ldots,n. \tag{6.79}$$

dla $k=1,2,\ldots,n$.

W celu obliczenia prawdopodobieństw (6.75) opisujących funkcjonowanie systemu w przypadku, gdy poziom zapasów w magazynie osiąga stan graniczny górny, wyznaczymy *explicite*wzory dla prawdopodobieństw warunkowych (6.76)-(6.78). Otrzymuje się je analogicznie jak relacje (2.59)-(2.65).

6.3.1. Prawdopodobieństwa warunkowe w przypadku górnego stanu granicznego.

Po zastosowaniu wzorów (2.6) oraz (6.9) otrzymujemy prawdopodobieństwo warunkowe:

$$q_{ik}^{11l}\left(z,\{V\};\tau,t\right)=$$
$$=\exp\left(-\pi_1^{*l}\tau\right)\int_A\frac{\pi_{ik}^{(l)}}{\pi_i^{(l)}}d\left(1-\exp\left(-\pi_i^{(l)}\theta\right)\right)+o_1^{(l)}\left(\tau\right), \tag{6.80}$$

gdzie zbiór A, po którym całkuje się oznacza, co następuje:

$$A=\left\{\theta:0<\theta<\tau,\ h\left(z+\theta x_i\right)+\left(\tau-\theta\right)x_k\geq V\right\},$$
$$i\neq k,\ z=z\left(t\right)\in\left[0,V\right],\ t\in T_l,\ t+\tau\in T_l.$$

Jeżeli $x_i>0,\ x_k>0,\ t\in T_l,\ t+\tau\in T_l,\ \tau$ małe, $0<\theta<\tau$, to zbiór A ma postać:

$$\left\{\theta:h\left(z+\theta x_i\right)+\left(\tau-\theta\right)x_k\geq V\right\}=\left\{\theta:z+\theta x_i+\left(\tau-\theta\right)x_k\geq V\right\}\cap$$
$$\cap\left\{\theta:z+\theta x_i\geq V\right\}\cup\left\{\theta:z+\theta x_i+\left(\tau-\theta\right)x_k\geq V\right\}\cap\left\{\theta:z+\theta x_i<V\right\}.$$

Powyższy zbiór jest następującej postaci, w zależności od znaku różnicy $x_i - x_k$:

dla $x_i - x_k > 0$ zbiór A ma postać następującą:

$$\left\{\theta : \theta \geq \frac{V - z - \tau x_k}{x_i - x_k}\right\} \cap \left\{\left\{\theta : 0 < \frac{V - z}{x_i}\right\} \cup \left\{\theta : \theta \geq \frac{V - z}{x_i}\right\}\right\},$$

zaś dla $x_i - x_k < 0$ zbiór A ma postać następującą:

$$\left\{\theta : \theta \leq \frac{V - z - \tau x_k}{x_i - x_k}\right\} \cap \left\{\left\{\theta : 0 < \frac{V - z}{x_i}\right\} \cup \left\{\theta : \theta \geq \frac{V - z}{x_i}\right\}\right\}.$$

Może on być równy, w zależności od różnych wartości różnicy $x_i - x_k$ oraz poziomów z, jak poniżej:

gdy $x_i - x_k < 0,\ V - \tau x_k < z < V - \tau x_i$, to zbiór A jest równy:

$$\left\{\theta : \theta < \frac{V - z - \tau x_k}{x_i - x_k}\right\} \cup \left\{\theta : \theta \geq \frac{V - z}{x_i}\right\},$$

gdy $x_i - x_k < 0,\ V - \tau x_i < z$, to zbiór A jest równy: $\{\theta : 0 < \theta < \tau\}$,

gdy $x_i - x_k < 0,\ z$ pozostałe, to zbiór A jest równy: $\varnothing$,

gdy $x_i - x_k > 0,\ V - \tau x_i < z < V - \tau x_k$, to zbiór A jest równy:

$$\left\{\theta : \frac{V - z - \tau x_k}{x_i - x_k} < \theta < \frac{V - z}{x_i}\right\} \cup \left\{\theta : \theta \geq \frac{V - z}{x_i}\right\},$$

gdy $x_i - x_k > 0,\ V - \tau x_k < z$, to zbiór A jest równy: $\{\theta : 0 < \theta < \tau\}$,

gdy $x_i - x_k > 0,\ z$ pozostałe, to zbiór A jest równy: $\varnothing$.

Zatem zbiór A ma różną postać, w zależności od wielkości różnicy $x_i - x_k$ oraz poziomu z, jak poniżej:

gdy $x_i - x_k < 0,\ V - \tau x_k < z < V - \tau x_i$, to mamy: $A = \left\{\theta : 0 < \theta < \frac{V - z - \tau x_k}{x_i - x_k}\right\}$,

gdy $x_i - x_k < 0,\ V - \tau x_i < z \leq V$, to mamy: $A = \{\theta : 0 < \theta < \tau\}$,

gdy $x_i - x_k < 0,\ z$ pozostałe, to mamy: $A = \varnothing$,

gdy $x_i - x_k > 0,\ V - \tau x_i < z < V - \tau x_k$, to mamy: $A = \left\{\theta : \frac{V - z - \tau x_k}{x_i - x_k} < \theta < \tau\right\}$,

gdy $x_i - x_k > 0,\ V - \tau x_k < z \leq V$, to mamy: $A = \{\theta : 0 < \theta < \tau\}$,

gdy $x_i - x_k > 0,\ z$ pozostałe, to mamy: $A = \varnothing$.

Stąd oraz ze wzoru (6.80) otrzymujemy różne postacie poniższych prawdopodobieństw:

$$q_{ik}^{11l}\left(z, \{V\}; \tau, t\right) + o_1^{(l)}, \tag{6.81}$$

które, w zależności od wielkości $x_i - x_k$ oraz poziomów z, mogą być równe, jak poniżej:

gdy $x_i - x_k < 0,\ V - \tau x_k < z < V - \tau x_i$, to są one równe:

$$\left(1 - \pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)} \frac{V - z - \tau x_k}{x_i - x_k} + o^{(l)}(\tau; z),$$

gdy $x_i - x_k < 0,\ V - \tau x_i < z \leq V$, to są one równe: $\left(1 - \pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}(\tau)$,

gdy $x_i - x_k < 0,\ z$ pozostałe, to są one równe są one równe: 0,

gdy $x_i - x_k > 0,\ V - \tau x_i < z < V - \tau x_k$, to są one równe:

$$\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau - \frac{V - z - \tau x_k}{x_i - x_k}\right) + o^{(l)}\left(\tau; z\right),$$

gdy $x_i - x_k > 0,\ V - \tau x_k < z \le V$, to są one równe: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\tau + o^{(l)}\left(\tau\right)$,

gdy $x_i - x_k > 0,\ z$ pozostałe, to są one równe: 0.

Analogicznie można wyznaczyć prawdopodobieństwa (6.76)-(6.78) dla $t \in T_l,\ t + \tau \in T_l$ w pozostałych przypadkach. Wyrażają się one następującymi wzorami (będącymi odpowiednikami relacji (2.59)-(2.65)) w zależności od poziomów wielkości x_i, a także poziomów z.

Dla $x_i < 0,\ x_k = 0$ oraz $0 \le z \le V$ prawdopodobieństwo to spełnia następującą równość:

$$q_{ik}^{11l}\left(z, \{V\}; \tau, t\right) = o_1^{(l)}\left(\tau\right). \tag{6.82}$$

Dla $x_i > 0,\ x_k = 0$ prawdopodobieństwo to:

$$q_{ik}^{11l}\left(z, \{V\}; \tau, t\right) - o_1^{(l)}\left(\tau\right) \tag{6.83}$$

jest równe, w zależności od poziomu z, jak poniżej:

gdy $V - \tau x_i < z \le V$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\left(\tau - \frac{V - z}{x_i}\right) + o^{(l)}\left(\tau; z\right)$,

gdy z pozostałe, to wynosi ono: 0.

Dla $x_i \le 0,\ x_k > 0$ poniższe prawdopodobieństwo:

$$q_{ik}^{11l}\left(z, \{V\}; \tau, t\right) - o_1^{(l)}\left(\tau\right) \tag{6.84}$$

jest równe, w zależności od poziomu z, jak poniżej:

gdy $V - \tau x_i < z \le V$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)}\frac{V - z - \tau x_k}{x_i - x_k} + o^{(l)}\left(\tau; z\right)$,

gdy z pozostałe, to wynosi ono: 0.

Dla $x_k < 0$ i $0 \le z \le V$ prawdopodobieństwo to spełnia nastepującą równość:

$$q_{kk}^{11l}\left(z, \{V\}; \tau, t\right) = o_1^{(l)}\left(\tau\right). \tag{6.85}$$

Dla $x_k \ge 0$ poniższe prawdopodobieństwo:

$$q_{kk}^{11l}\left(z, \{V\}; \tau, t\right) - o_1^{(l)}\left(\tau\right) \tag{6.86}$$

jest równe, w zależności od poziomu z, jak poniżej:

gdy $V - \tau x_k < z \le V$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right) + o^{(l)}\left(\tau; z\right)$,

gdy z pozostałe, to wynosi ono: 0.

Dla $x_k \le 0$ i $0 \le z \le V$ prawdopodobieństwo to spełnia następującą równość:

$$q_{kk}^{01l}\left(z, \{V\}; \tau, t\right) = o_1^{(l)}\left(\tau\right). \tag{6.87}$$

Dla $x_k > 0$ prawdopodobieństwo to:

$$q_{kk}^{01l}\left(z, \{V\}; \tau, t\right) - o_1^{(l)}\left(\tau\right) \tag{6.88}$$

jest równe, w zależności od poziomu z, jak poniżej:

gdy $V - \tau x_i < z \le V$, to wynosi ono: $\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right)\pi_0^{*l}\frac{z + \tau x_k - V}{x_k + a} + o^{(l)}\left(\tau; z\right)$,

gdy z pozostałe, to wynosi ono: 0.

Dla $x_k < 0,\ x_i$ - dowolne i $0 \le z \le V$ prawdopodobieństwo to spełnia następującą równość:

$$q_{ik}^{11l}\left(z,\{V\};\tau,t\right)=o_1^{(l)}\left(\tau\right). \tag{6.89}$$

Składniki $o_1^{(l)}\left(\tau\right)$, $o^{(l)}\left(\tau\right)$, $o^{(l)}\left(\tau;z\right)$ występujące w relacjach (6.81)-(6.89) są w otoczeniu $\tau=0$ wielkościami nieskończenie małymi rzędu wyższego niż τ .

Związki (6.81)-(6.89) wykorzystamy w następnym paragrafie do otrzymania równań, jakie spełniają prawdopodobieństwa (6.74) opisujące funkcjonowanie badanego systemu w okresie T_l w przypadku, gdy poziom zapasów osiąga górny stan graniczny.

6.3.2. Stan graniczny górny, a intensywności strukturalnego procesu zaopatrzenia podsystemu *M*.

W celu obliczenia następujących prawdopodobieństw:

$$Q_k^{1l}\left(\{V\},t\right)$$

wyprowadzone będą równania, które one spełniają w okresie T_l.

W wyniku zastosowania wzoru (6.75) oraz zależności (6.81)-(6.89) dla $x_k>0,\ t\in T_l,\ t+\tau\in T_l$, otrzymujemy (zob. analogia z (2.66)) następujące prawdopodobieństwa.

$$\begin{aligned}
&Q_k^{1l}\left(\{V\},t+\tau\right)=\\
&=\sum_i\left\{\int_0^V q_{ik}^{11l}\left(z,\{V\};\tau,t\right)f_i^{1l}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+\right.\\
&+Q_i^{1l}\left(\{0\},t\right)q_{ik}^{11l}\left(0,\{V\};\tau,t\right)+Q_i^{1l}\left(\{V\},t\right)q_{ik}^{11l}\left(V,\{V\};\tau,t\right)\Big\}+\\
&+\int_0^V q_{kk}^{01l}\left(z,\{V\};\tau,t\right)f_k^{0l}\left(z,t\right)\mathrm{d}z+Q_k^{0l}\left(\{0\},t\right)q_{kk}^{01l}\left(0,\{V\};\tau,t\right)+\\
&+Q_k^{0l}\left(\{V\},t\right)q_{kk}^{01l}\left(V,\{V\};\tau,t\right)=\\
&=A_{k,l}^{+1}+A_{k,l}^{01}+A_{k,l}^{-1},
\end{aligned} \tag{6.90}$$

Każdy z trzech składników sumy: $A_{k,l}^{+1}$, $A_{k,l}^{01}$ oraz $A_{k,l}^{-1}$ będzie następująco przedstawiony.

Pierwszy składnik $A_{k,l}^{+1}$ wynosi:

$$A_{k,l}^{+1} =$$

$$= \sum_{\substack{i \neq k \\ x_i > 0}} \left\{ \int_0^V q_{ik}^{11l}\left(z,\{V\};\tau,t\right) f_i^{1l}\left(z,t\right) \mathrm{d}z + \right.$$

$$\left. + Q_i^{1l}\left(\{0\},t\right) q_{ik}^{11l}\left(z,\{V\};\tau,t\right) + Q_i^{1l}\left(\{V\},t\right) q_{ik}^{11l}\left(V,\{V\};\tau,t\right) \right\} =$$

$$= \sum_{\substack{i \neq k \\ x_i < x_k}} \left\{ \int_0^{V-\tau x_k} o^{(l)}\left(\tau\right) f_i^{1l}\left(z,t\right) \mathrm{d}z + \int_{V-\tau x_k}^{V-\tau x_i} \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right) \pi_{ik}^{(l)} \frac{V-z-\tau x_k}{x_i - x_k} + \right. \right.$$

$$\left. + o^{(l)}\left(\tau\right) \right] f_i^{1l}\left(z,t\right) dz + \int_{V-\tau x_i}^{V} \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right) \pi_{ik}^{(l)} \tau + o^{(l)}\left(\tau\right) \right] f_i^{1l}\left(z,t\right) \mathrm{d}z +$$

$$+ Q_i^{1l}\left(\{0\},t\right) o^{(l)}\left(\tau\right) + Q_i^{1l}\left(\{V\},t\right) \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right) \pi_{ik}^{(l)} \tau + o^{(l)}\left(\tau\right) \right] \Big\} +$$

$$+ \sum_{\substack{i \neq k \\ x_i > x_k}} \left\{ \int_0^{V-\tau x_i} o^{(l)}\left(\tau\right) f_i^{1l}\left(z,t\right) \mathrm{d}z + \int_{V-\tau x_i}^{V-\tau x_k} \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right) \pi_{ik}^{(l)} \left(\tau - \frac{V-z-\tau x_k}{x_i - x_k} \right) + \right. \right.$$

$$\left. + o^{(l)}\left(\tau;z\right) \right] f_i^{1l}\left(z,t\right) \mathrm{d}z + \int_{V-\tau x_k}^{V} \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right) \pi_{ik}^{(l)} \tau + o^{(l)}\left(\tau\right) \right] f_i^{1l}\left(z,t\right) \mathrm{d}z +$$

$$\left. + Q_i^{1l}\left(\{V\},t\right) \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right) \pi_{ik}^{(l)} \tau + o^{(l)}\left(\tau\right) \right] + o^{(l)}\left(\tau\right) Q_i^{1l}\left(\{0\},t\right) \right\},$$

kolejny, drugi składnik $A_{k,l}^{01}$ wynosi:

$$A_{k,l}^{01} =$$

$$= \int_0^V q_{kk}^{11l}\left(z,\{V\};\tau,t\right) f_k^{1l}\left(z,t\right) \mathrm{d}z + Q_k^{1l}\left(\{0\},t\right) q_{kk}^{11l}\left(0,\{V\};\tau,t\right) +$$

$$+ Q_k^{1l}\left(\{V\},t\right) q_{kk}^{11l}\left(V,\{V\};\tau,t\right) + \int_0^V q_{kk}^{01l}\left(z,\{V\};\tau,t\right) f_k^{0l}\left(z,t\right) \mathrm{d}z +$$

$$+ Q_k^{0l}\left(\{0\},t\right) q_{kk}^{01l}\left(0,\{0\};\tau,t\right) + Q_k^{0l}\left(\{V\},t\right) q_{kk}^{01l}\left(V,\{V\};\tau,t\right) =$$

$$= \int_0^{V-\tau x_k} o^{(l)}\left(\tau\right) f_k^{1l}\left(z,t\right) \mathrm{d}z + \int_{V-\tau x_k}^{V} \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right) + o^{(l)}\left(\tau\right) \right] f_k^{1l}\left(z,t\right) \mathrm{d}z +$$

$$+ Q_k^{1l}\left(\{0\},t\right) o^{(l)}\tau + Q_k^{1l}\left(\{V\},t\right) \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\left(1-\pi_k^{*l}\right) + o^{(l)}\left(\tau\right) \right] +$$

$$+ \int_0^{V-\tau x_k} \left[\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right) \pi_0^{*l} \frac{z+\tau x_k - V}{x_k + a} + o^{(l)}\left(\tau\right) \right] f_k^{0l}\left(z,t\right) \mathrm{d}z + Q_k^{0l}\left(\{0\},t\right) o^{(l)}\left(\tau\right) +$$

$$+ Q_k^{0l}\left(\{V\},t\right) \left[\left(1-\pi_k^{(l)}\tau\right) \pi_0^{*l} \frac{\tau x_k}{x_k + a} + o^{(l)}\left(\tau\right) \right],$$

trzeci zaś składnik $A_{k,l}^{-1}$ jest równy:

$$A_{k,l}^{-1} =$$

$$= \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i\le 0}} \left\{ \int_0^V q_{ik}^{11l}\left(z,\{V\};\ \tau,t\right) f_i^{1l}\left(z,t\right)\mathrm{d}z + Q_i^{1l}\left(\{0\},t\right) q_{ik}^{11l}\left(0,\{V\};\ \tau,t\right) + \right.$$

$$\left. + Q_i^{1l}\left(\{V\},t\right) q_{ik}^{11l}\left(V,\{V\};\ \tau,t\right) \right\} = \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i\le 0}} \left\{ \int_0^{V-\tau x_k} o^{(l)}\left(\tau\right) f_i^{1l}\left(z,t\right)\mathrm{d}z + \right.$$

$$+ \int_{V-\tau x_k}^{V} \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)} \frac{V-z-\tau x_k}{x_i - x_k} + o^{(l)}\left(\tau;z\right) \right] f_i^{1l}\left(z,t\right)\mathrm{d}z +$$

$$\left. + Q_i^{1l}\left(\{0\},t\right) o^{(l)}\left(\tau\right) + Q_i^{1l}\left(\{V\},t\right) \left[\left(1-\pi_1^{*l}\tau\right)\pi_{ik}^{(l)} \frac{\tau x_k}{x_k - x_i} + o^{(l)}\left(\tau\right) \right] \right\}.$$

Przenieśmy teraz na lewą stronę wzoru (6.90) wielkość $Q_k^{1l}\left(\{V\},t\right)$. Po obustronnym podzieleniu otrzymanej równości przez τ i przejściu do granicy przy $\tau \to 0$ otrzymujemy następujące pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial Q_k^{1l}\left(\{V\},t\right)}{\partial t} =$$

$$= \pi_0^{*l} Q_k^{0l}\left(\{V\},t\right) \frac{x_k}{a+x_k} - \left(\pi_k^{(l)} + \pi_1^{*l}\right) Q_k^{1l}\left(\{V\},t\right) + \tag{6.91}$$

$$+ x_k f_k^{1l}\left(V,t\right) + \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i>0}} \frac{x_k}{x_k - x_i} Q_i^{1l}\left(\{V\},t\right)\pi_{ik}^{(l)}.$$

Biorąc pod uwagę fakt, że w powyższym wzorze składniki dla $x_i < 0$ spełniają następujący warunek:

$$Q_i^{1l}\left(\{V\},t\right) = 0$$

oraz związek (6.79), wtedy wzór (6.91) można zapisać w prostszej postaci. Relację (6.91) dla $x_k = 0$ otrzymuje się analogicznie.

Funkcjonowanie badanego systemu gospodarki zapasami w przypadku, gdy poziom zapasów osiąga stan graniczny górny opisane jest zatem prawdopodobieństwami $Q_k^{ul}\left(\{V\},t\right)$ spełniającymi następujący układ równań różniczkowych:

$$\frac{\partial Q_k^{1l}\left(\{V\},t\right)}{\partial t} =$$

$$= x_k f_k^{1l}\left(V,t\right) - \left(\pi_k^{(l)} + \pi_1^{*l}\right) Q_k^{1l}\left(\{V\},t\right) + \tag{6.92}$$

$$+ \sum_{\substack{i\neq k \\ x_i\ge 0}} Q_i^{1l}\left(\{V\},t\right)\pi_{ik}^{(l)},\ x_k \ge 0,\ t\in T_l,$$

$$Q_k^{1l}\left(\{V\},t\right) = 0,\ x_k < 0,\ t\in T_l, \tag{6.93}$$

$$Q_k^{0l}\left(\{V\},t\right) = 0,\ k = 1,2,\ldots,n. \tag{6.94}$$

dla $k = 1,2,\ldots,n,\ t\in T_l$.

Relacje te zostaną wykorzystane, między innymi, do opisu działania badanego systemu w okresie T_l $(l = 1,2,\ldots,m)$.

7. Probabilistyczny opis funkcjonowania systemu logistycznego *S*(*st*).

Wyniki przedstawione w paragrafach 6.1, 6.2 i 6.3 wykorzystam tutaj do uzyskania stochastycznego opisu działania badanego systemu logistycznego wspomagającego centrum usług (rys. 8) w przypadku, gdy wejście $w(t)$ podsystemu *M* jest procesem strukturalnym (system $S(st)$).

Funkcjonowanie rozważanego systemu w okresie T_l ($l=1,2,\ldots,m$) charakteryzuje następujący układ równań różniczkowych odpowiednio: na funkcję gęstości prawdopodobieństwa $f_k^{1l}(z,t)$ oraz funkcję gęstości prawdopodobieństwa $f_k^{0l}(z,t)$:

$$\frac{\partial f_k^{1l}(z,t)}{\partial t}= \\ =-x_k\frac{\partial f_k^{1l}(z,t)}{\partial z}-\left(\pi_k^{(l)}+\pi_1^{*l}\right)f_k^{1l}(z,t)+ \\ +\sum_{i\neq k}\pi_{ik}^{(l)}f_i^{1l}(z,t)+\pi_0^{*l}f_k^{0l}(z,t); \tag{7.1}$$

dla $0<z<V,\ t\in T_l,\ k=1,2,\ldots,n$

$$\frac{\partial f_k^{0l}(z,t)}{\partial t}= \\ =a\frac{\partial f_k^{0l}(z,t)}{\partial z}-\left(\pi_k^{(l)}+\pi_0^{*l}\right)f_k^{0l}(z,t)+ \\ +\sum_{i\neq k}\pi_{ik}^{(l)}f_i^{0l}(z,t)+\pi_1^{*l}f_k^{1l}(z,t); \tag{7.2}$$

dla $0<z<V,\ \ t\in T_l,\ k=1,2,\ldots,n$ (zob. wzory (6.42), (6.43))

oraz na prawdopodobieństwa odpowiednio $Q_k^{1l}(\{0\},t)$ oraz prawdopodobieństwa $Q_k^{0l}(\{0\},t)$, które przyjmują poniższe postacie.

Dla $x_k\le 0,\ t\in T_l$ mamy następującą postać:

$$\frac{\partial Q_k^{1l}(\{0\},t)}{\partial t}= \\ =\pi_0^{*l}Q_k^{0l}(\{0\},t)-\left(\pi_k^{(l)}+\pi_1^{*l}\right)Q_k^{1l}(\{0\},t)+ \\ -x_k f_k^{1l}(0,t)+\sum_{\substack{i\neq k\\ x_i\le 0}}Q_i^{1l}(\{0\},t)\pi_{ik}^{(l)}; \tag{7.3}$$

zaś dla $x_k>0,\ t\in T_l$ prawdopodobieństwo to wynosi:

$$Q_k^{1l}(\{0\},t)=0; \tag{7.4}$$

z kolei dla $Q_k^{01}(\{0\},t)$ mamy następującą postać:

$$\frac{\partial Q_k^{0l}(\{0\},t)}{\partial t}= \\ =\pi_1^{*l}Q_k^{1l}(\{0\},t)-\left(\pi_k^{(l)}+\pi_0^{*l}\right)Q_k^{0l}(\{0\},t)+ \\ +af_k^{0l}(0,t)+\sum_{i\neq k}Q_i^{0l}(\{0\},t)\pi_{ik}^{\{l\}}; \tag{7.5}$$

dla $k=1,2,\ldots,n,\ t\in T_l$ (zob. wzory (6.71)-(6.73)) .

Ponadto dla $x_k\geq 0,\ t\in T_l$ mamy następującą postać:

$$\frac{\partial Q_k^{1l}\left(\{V\},t\right)}{\partial t}=$$
$$=x_k f_k^{1l}\left(V,t\right)-\left(\pi_k^{(l)}+\pi_1^{*l}\right)Q_k^{1l}\left(\{V\},t\right)+ \tag{7.6}$$
$$+\sum_{\substack{i\neq k\\ x_i\geq 0}} Q_i^{1l}\left(\{V\},t\right)\pi_{ik}^{(l)};$$

zaś dla $x_k<0,\ t\in T_l$ mamy następujące równościi:

$$Q_k^{1l}\left(\{V\},t\right)=0; \tag{7.7}$$

oraz

$$Q_k^{0l}\left(\{V\},t\right)=0. \tag{7.8}$$

dla $k=1,2,\ldots,n$ (zob. wzory (6.92)-(6.94))

Układ równań (7.1)-(7.8) przedstawia matematyczny model systemu logistycznego wspomagającego centrum usług w przypadku strukturalnego procesu dostawy produktu $S(st)$.

W praktyce ważne są również następujące warianty tego modelu:

1) Intensywności $\pi_{ik}^{(l)}$, π_s^{*l} procesu wejścia podsystemu i są stałe,

$$\text{czyli } \pi_{ik}^{(l)}=\pi_{ik},\ \pi_s^{*l}=\pi_s^*,$$

ponadto funkcje:

$f_k^{ul}\left(z,t\right)=f_k^{u}\left(z,t\right),\ Q_k^{ul}\left(\{0\},t\right)=Q_k^{u}\left(\{0\},t\right),\ Q_k^{ul}\left(\{V\},t\right)=Q_k^{u}\left(\{V\},t\right)$

zależą od czasu w okresie $T_1\cup T_2\cup\ldots\cup T_m$.

2) Intensywności $\pi_{ik}^{(l)}$, π_s^{*l} procesu wejścia podsystemu *M* zależą od okresu T_l, ale funkcje:

$f_k^{ul}\left(z,t\right)=f_k^{ul}\left(z\right),\ Q_k^{ul}\left(\{0\},t\right)=Q_k^{ul}\left(\{0\}\right),\ Q_k^{ul}\left(\{V\},t\right)=Q_k^{ul}\left(\{V\}\right)$

nie zależą od czasu w okresie T_l.

3) Intensywności $\pi_{ik}^{(l)}$, π_s^{*l} procesu wejścia podsystemu *M* są stałe:

$$\pi_{ik}^{(l)}=\pi_{ik},\ \pi_s^{*l}=\pi_s^*$$

oraz funkcje:

$f_k^{ul}\left(z,t\right)=f_k^{u}\left(z\right),\ Q_k^{ul}\left(\{0\},t\right)=Q_k^{u}\left(\{0\}\right),\ Q_k^{ul}\left(\{V\},t\right)=Q_k^{u}\left(\{V\}\right)$

nie zależą od czasu w okresie $T_1\cup T_2\cup\ldots\cup T_m$.

Model (7.1)-(7.8) dla wariantu pierwszego 1) przyjmuje różne postacie w zależności od znaku x_k .

Tak więc dla $0<z<V,\ k=1,2,\ldots,n$ funkcje $f_k^1\left(z,t\right)$ spełniają następujący układ równań różniczkowych:

$$\frac{\partial f_k^1(z,t)}{\partial t} =$$

$$= -x_k \frac{\partial f_k^1(z,t)}{\partial z} - \left(\pi_k + \pi_1^*\right) f_k^1(z,t) +$$

$$+ \sum_{i \neq k} \pi_{ik} f_i^1(z,t) + \pi_0^* f_k^0(z,t);$$

zaś dla $0 < z < V$, $k = 1,2,\ldots,n$ funkcje $f_k^0(z,t)$ spełniają następujący układ równań różniczkowych:

$$\frac{\partial f_k^0(z,t)}{\partial t} =$$

$$= a \frac{\partial f_k^0(z,t)}{\partial z} - \left(\pi_k + \pi_0^*\right) f_k^0(z,t) + \sum_{i \neq k} \pi_{ik} f_i^0(z,t) + \pi_1^* f_k^1(z,t).$$

Ponadto dla $k = 1,2,\ldots,n$ funkcje $Q_k^1(\{0\},t)$ dla $x_k \leq 0$ spełniają następujący układ równań różniczkowych:

$$\frac{\partial Q_k^1(\{0\},t)}{\partial t} =$$

$$= \pi_0^* Q_k^0(\{0\},t) - \left(\pi_k + \pi_1^*\right) Q_k^1(\{0\},t) +$$

$$- x_k f_k^1(0,t) + \sum_{\substack{i \neq k \\ x_i \leq 0}} Q_i^1(\{0\},t) \pi_{ik};$$

zaś dla $x_k > 0$ funkcje $Q_k^1(\{0\},t)$ przyjmują wartość zero:

$$Q_k^1(\{0\},t) = 0.$$

Z kolei dla $k = 1,2,\ldots,n$ funkcje $Q_k^0(\{0\},t)$ spełniają następujący układ równań różniczkowych:

$$\frac{\partial Q_k^0(\{0\},t)}{\partial t} =$$

$$= \pi_1^* Q_k^1(\{0\},t) - \left(\pi_k + \pi_0^*\right) Q_k^0(\{0\},t) + a f_k^0(0,t) + \sum_{i \neq k} Q_i^0(\{0\},t) \pi_{ik}.$$

Ponadto funkcje $Q_k^1(\{V\},t)$ dla $x_k \geq 0$ spełniają następujący układ równań różniczkowych:

$$\frac{\partial Q_k^1(\{V\},t)}{\partial t} =$$

$$= x_k f_k^1(V,t) - \left(\pi_k + \pi_1^*\right) Q_k^1(\{V\},t) +$$

$$+ \sum_{\substack{i \neq k \\ x_i \geq 0}} Q_i^1(\{V\},t) \pi_{ik};$$

zaś dla $x_k < 0$ funkcje $Q_k^1(\{V\},t)$ oraz $Q_k^0(\{V\},t)$ przyjmują następujące wartości:

$$Q_k^1(\{V\},t) = 0 \text{ oraz } Q_k^0(\{V\},t) = 0.$$

Dla wariantu drugiego 2) model (7.1)-(7.8) sprowadza się dla $0 < z < V$, $k = 1,2,\ldots,n$ do następującej prostszej postaci:

dla funkcji $f_k^{1l}(z)$ mamy postać:

$$x_k \frac{\mathrm{d}f_k^{1l}(z)}{\mathrm{d}z} =$$
$$= \left(\pi_k^{(l)} + \pi_1^{*l}\right) f_k^{1l}(z) - \sum_{i \neq k} \pi_{ik}^{(l)} f_i^{1l}(z) - \pi_0^{*l} f_k^{0l}(z);$$

oraz dla funkcji $f_k^{0l}(z)$ mamy postać:

$$a \frac{\mathrm{d}f_k^{0l}(z)}{\mathrm{d}z} =$$
$$= \left(\pi_k^{(l)} + \pi_0^{*l}\right) f_k^{0l}(z) - \sum_{i \neq k} \pi_{ik}^{(l)} f_i^{0l}(z) - \pi_1^{*l} f_k^{1l}(z).$$

I dalej dla $x_k \leq 0$ dla funkcji $Q_k^{0l}(\{0\})$ mamy postać:

$$\pi_0^{*l} Q_k^{0l}(\{0\}) =$$
$$= \left(\pi_k^{(l)} + \pi_1^{*l}\right) Q_k^{1l}(\{0\}) + x_k f_k^{1l}(0) +$$
$$- \sum_{\substack{i \neq k \\ x_i \leq 0}} Q_i^{1l}(\{0\}) \pi_{ik}^{(l)};$$

zaś dla $x_k > 0$ dla funkcji $Q_k^{1l}(\{0\})$ mamy postać:

$$Q_k^{1l}(\{0\}) = 0.$$

Ponadto dla $k = 1, 2, \ldots, n$ mamy równość:

$$\pi_1^{*l} Q_k^{1l}(\{0\}) =$$
$$= \left(\pi_k^{(l)} + \pi_0^{*l}\right) Q_k^{0l}(\{0\}) - a f_k^{0l}(0) - \sum_{i \neq k} Q_i^{0l}(\{0\}) \pi_{ik}^{\{l\}}.$$

Dla $x_k \geq 0$ funkcje $f_k^1(V)$ spełniają następującą zależność od $Q_k^{1l}(\{V\})$:

$$x_k f_k^{1l}(V) =$$
$$= \left(\pi_k^{(l)} + \pi_1^{*l}\right) Q_k^{1l}(\{V\}) - \sum_{\substack{i \neq k \\ x_i \geq 0}} Q_i^{1l}(\{V\}) \pi_{ik}^{(l)}.$$

Warto zauważyć, że dla $k = 1, 2, \ldots, n$ oraz $x_k < 0$ mamy następujące równości:

$$Q_k^{1l}(\{V\}) = 0 \text{ oraz } Q_k^{0l}(\{V\}) = 0.$$

Model (7.1)-(7.8) dla wariantu trzeciego 3) przyjmuje dla $0 < z < V$, $k = 1, 2, \ldots, n$ postać następującą:

$$x_k \frac{\mathrm{d}f_k^1(z)}{\mathrm{d}z} =$$
$$= \left(\pi_k + \pi_1^*\right) f_k^1(z) - \sum_{i \neq k} \pi_{ik} f_i^1(z) - \pi_0^* f_k^0(z);$$

oraz dla funkcji $f_k^0(z)$ mamy postać:

$$a \frac{df_k^0(z)}{dz} =$$
$$= \left(\pi_k + \pi_1^*\right) f_k^0(z) - \sum_{i \neq k} \pi_{ik} f_i^0(z) - \pi_1^* f_k^1(z).$$

I dalej dla $x_k \leq 0$ dla funkcji $Q_k^0(\{0\})$ mamy postać:

$$\pi_0^* Q_k^0\left(\{0\}\right) =$$
$$= \left(\pi_k + \pi_1^*\right) Q_k^1\left(\{0\}\right) + x_k f_k^1(0) - \sum_{\substack{i \neq k \\ x_i \leq 0}} Q_i^1\left(\{0\}\right)\pi_{ik};$$

zaś dla $x_k > 0$ la funkcji $Q_k^1\left(\{0\}\right)$ mamy postać:

$$Q_k^1\left(\{0\}\right) = 0.$$

Ponadto dla $k = 1, 2, \ldots, n$ mamy równość:

$$\pi_1^* Q_k^1\left(\{0\}\right) =$$
$$= \left(\pi_k + \pi_1^*\right) Q_k^0\left(\{0\}\right) - a f_k^0(0) - \sum_{i \neq k} Q_i^0\left(\{0\}\right)\pi_{ik}.$$

Dla $x_k \geq 0$ funkcje $f_k^1(V)$ spełniają następujące zależności od $Q_k^1\left(\{V\}\right)$:

$$x_k f_k^1(V) =$$
$$= \left(\pi_k + \pi_1^*\right) Q_k^1\left(\{V\}\right) - \sum_{\substack{i \neq k \\ x_i \geq 0}} Q_i^1\left(\{V\}\right)\pi_{ik};$$

Warto też zauważyć, że dla $k = 1, 2, \ldots, n$ oraz dla $x_k < 0$ mamy następujące równości:

$$Q_k^1\left(\{V\}\right) = 0 \text{ oraz } Q_k^0\left(\{V\}\right) = 0.$$

Matematyczny opis działania badanego systemu w wersji strukturalnego procesu dostawy produktu $S(st)$ wyrażony relacjami (7.1)-(7.8) lub jednym z trzech podanych wyżej wariantów tych relacji, zostanie dalej zastosowany do wyznaczenia prognoz ilościowych tego systemu.

Mogą być one wykorzystane przez podsystem zarządzania do zwiększenia efektywności funkcjonowania tego systemu, a zarazem usprawnienia działalności centrum usług.

8. Prognozowanie charakterystyk opisujących działanie systemu logistycznego *S*(*st*).

W celu wyznaczenia prognoz charakterystyk badanego systemu należy przyjąć, że $t \in T_m \cap T_i^*$, gdzie T_i^* oznacza horyzont prognozy i-tej prognozowanej wielkości.

Jeżeli w systemie $S(st)$ w chwili t wystąpi zdarzenie losowe W_1 postaci:

- wielkość $w(t)$ produktu dostarczanego do podsystemu *M*, za pomocą podsystemu transportowego*T* jest mniejsza od zapotrzebowania a odbiorcy *O*, czyli:

$$w(t) < a$$

a zawartość $z(t)$ magazynu *M* wynosi zero, czyli:

$$z(t) = 0$$

i podsystem *T* pracuje, czyli $u = 1$

- lub zawartość $z(t)$ magazynu *M* wynosi zero, czyli:

$$z(t) = 0$$

i podsystem *T* nie pracuje, znajduje się w stanie awarii, czyli $u = 0$,

to odbiorca zmuszony jest do korzystania z innych źródeł zaopatrzenia lub ograniczenia własnej działalności. Prowadzi to do strat w badanym systemie, czyli strat odbiorcy.

Prawdopodobieństwo wystąpienia takiego niekorzystnego zdarzenia oznaczmy przez:

$$w_1 = P(W_1).$$

Prognozę $\hat{w}_1(t)$ prawdopodobieństwa deficytu podaży produktu dla odbiorcy O w przyszłej chwili t obliczam za pomocą następującego wzoru:

$$\hat{w}_1(t) = \sum_{x_k<0} Q_k^{1m}(\{0\},t) + \sum_k Q_k^{0m}(\{0\},t). \tag{8.1}$$

Niekorzystny stan badanego systemu $S(st)$ w chwili t związany jest również z innym zdarzeniem losowym W_2 kiedy:

- wielkość $w(t)$ produktu dostarczanego do podsystemu O, za pomocą podsystemu transportowego T, przekracza zapotrzebowanie a odbiorcy O, czyli:

  $$w(t) > a$$

  a podsystem T znajduje się w stanie pracy ($u = 1$) i magazyn M jest zapełniony, czyli:

  $$u = 1 \text{ i } z(t) = V$$

- lub podsystem transportowy T nie pracuje ($u = 0$), czyli znajduje się w stanie awarii i magazyn jest pusty, czyli

  $$u = 0 \text{ i } z(t) = 0.$$

W tym przypadku podsystem produkcji P (nadawca) nie ma możliwości przesłania swojego produktu do odbiorcy O. Prowadzi to również do strat w systemie, czyli strat nadawcy.

Oznaczmy przez w_2 prawdopodobieństwo tego, także niekorzystnego, zdarzenia:

$$w_2 = P(W_2).$$

Prognozę $\hat{w}_2(t)$ prawdopodobieństwa strat nadawcy (podsystemu P) w przyszłej chwili t wyznaczam z następującego wzoru:

$$\hat{w}_2(t) = \sum_{x_k>0} Q_k^{1m}(\{V\},t) + \sum_k Q_k^{0m}(\{0\},t). \tag{8.2}$$

Wielkości (8.1), (8.2) są więc prognozami charakterystyk oceny stopnia strat produkcyjnych odpowiednio:

odbiorcy O (charakterystyka w_1) i nadawcy P (charakterystyka w_2).

Jako charakterystykę oceny stopnia wykorzystania magazynu M w chwili t w badanym systemie $S(st)$ można przyjąć prawdopodobieństwo zdarzenia losowego W_3 postaci:

- poziom $z(t)$ wypełnienia magazynu jest dodatni, ale mniejszy od V, czyli:

  $$0 < z(t) < V$$

  i podsystem transportowy T znajduje się w stanie pracy ($u = 1$)

- lub podsystem M jest w stanie pośrednim, czyli:

  $$0 < z(t) < V$$

  i podsystem T nie pracuje, czyli jest w stanie awarii ($u = 0$).

Niech, podobnie jak poprzednio, w_3 oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia W_3:

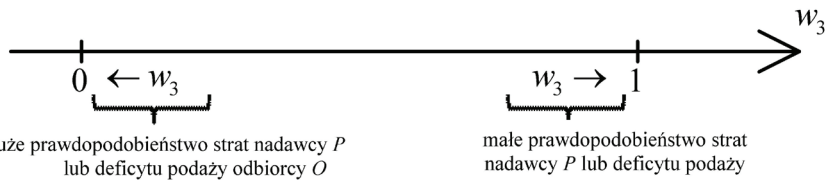
$$w_3 = P(W_3).$$

Prognozę $\hat{w}_3(t)$ charakterystyki oceny stopnia wykorzystania podsystemu M w badanym systemie w przyszłej chwili t obliczymy z następującego wzoru:

$$\hat{w}_3(t) = \sum_k Q_k^{1m}(V,t) + \sum_k Q_k^{0m}(V,t). \tag{8.3}$$

Z małym prawdopodobieństwem w przyszłej chwili t należy oczekiwać strat nadawcy, czyli podsystemu P lub wystąpienia deficytu podaży produktu dla odbiorcy O, gdy wartość prognozy (8.3) jest bliska jedności.

Jeżeli zaś wartość ta jest bliska zera, to z dużym prawdopodobieństwem w chwili t należy oczekiwać strat nadawcy P lub deficytu u odbiorcy O, co ilustruje rys. 18



Rys. 18. Prawdopodobieństwo deficytu podaży produktu lub strat nadawcy dla $S(st)$.

Stany graniczne oraz stan pośredni poziomu zapasów w magazynie M można prognozować za pomocą następujących wzorów:

gdy ma miejsce stan graniczny dolny zapasów w M, to prognoza $\hat{w}_4$ wynosi:

$$\hat{w}_4(t) = \sum_{u,k} Q_k^{um}(\{0\},t). \tag{8.4}$$

gdy ma miejsce stan graniczny górny zapasów w M, to prognoza $\hat{w}_5$ wynosi:

$$\hat{w}_5(t) = \sum_{u,k} Q_k^{um}(\{V\},t). \tag{8.5}$$

gdy zaś zrealizowany jest stan pośredni zapasów w M, to prognoza $\hat{w}_6$ wynosi:

$$\hat{w}_6(t) = \sum_{u,k} \int_{c_1}^{c_2} f_k^{um}(z,t)\,\mathrm{d}z,\ 0 \le c_1 < c_2 \le V. \tag{8.6}$$

Wzór (8.4) określa prognozę $\hat{w}_4(t)$ prawdopodobieństwa wystąpienia dolnego stanu granicznego poziomu a zapasów magazynu M, czyli stanu zerowego wypełnienia magazynu w chwili t, tj. dla:

$$w(t) = 0$$

natomiast relacja (8.5) oznacza prognozę $\hat{w}_5(t)$ prawdopodobieństwa górnego stanu granicznego poziomu zapasów a podsystemu M, czyli stanu maksymalnego wypełnienia magazynu w chwili t, tj. dla:

$$w(t) = V.$$

Prawdopodobieństwo stanu nieekstremalnego poziomu zapasów magazynub M w chwili t, czyli dla:

$$0 < w(t) < V$$

można prognozować za pomocą wzoru (8.6).

Wielkość podaży produktu podsystemu *P* oraz stany, w których może znajdować się podsystem transportowy *T* można prognozować z użyciem kolejnych wzorów.

I tak prognoza poziomu y_k podaży produktu wyraża się następującym wzorem:

$$\hat{w}_7(t) = \sum_u Q_k^{um}(\{0\},t) + \sum_u Q_k^{um}(\{V\},t) + \sum_u \int_0^V f_k^{um}(z,t)\,\mathrm{d}z, \tag{8.7}$$

zaś prognoza stanu u ($u=1$ lub $u=0$) podsystemu *T* wyraża się kolejnym wzrorem:

$$\hat{w}_8(t) = \sum_k \left\{ Q_k^{um}(\{0\},t) + Q_k^{um}(\{V\},t) + \int_0^V f_k^{um}(z,t)\,\mathrm{d}z \right\}. \tag{8.8}$$

Prognozę $\hat{w}_7(t)$ prawdopodobieństwa, że poziom podaży produktu w przyszłej chwili t będzie wynosił y_k obliczamy ze wzoru (8.7), a prognozę $\hat{w}_8(t)$ prawdopodobieństwa stanu u podsystemu transportowego *T* w przyszłej chwili t, czyli dla $u=1$, gdy podsystem *T* pracuje oraz dla $u=0$, gdy podsystem *T* nie pracuje – znajduje się w stanie awarii – na podstawie wzoru (8.8).

Dwuwymiarowy proces $\big(z(t),\ v(t)\big)$ charakteryzuje funkcjonowanie podsystemu *M* oraz podsystemu transportowego *T*. Można zatem prognozować prawdopodobieństwo zajścia w przyszłej chwili t następujących zdarzeń losowych:

- stan poziomu zapasów magazynu *M* nie jest ekstremalny, czyli dla:
$$0 < z(t) < V$$
i podsystem transportowy *T* znajduje się w stanie u:
$$u=1 - \text{praca lub } u=0 - \text{awaria},$$
- poziom zapasów podsystemu *M* osiąga stan graniczny dolny – magazyn jest pusty, czyli dla:
$$z(t) = 0$$
i podsystem transportowy *T* znajduje się w stanie u:
$$u=1 - \text{praca lub } u=0 - \text{awaria},$$
- poziom zapasów magazynu *M* osiąga stan graniczny górny – magazyn jest zapełniony, czyli dla:
$$z(t) = V$$
i podsystem *T* znajduje się w stanie u:
$$u=1 - \text{praca lub } u=0 - \text{awaria}.$$

Prognozy te nożna wyznaczyć kolejno za pomocą następujących wzorów:
dla prognozy stanu nieekstremalnego mamy następującą relację:

$$\hat{w}_9(t) = \sum_k \int_{c_1}^{c_2} f_k^{um}(z,t)\,dz,\ 0 \le c_1 < c_2 \le V, \tag{8.9}$$

$$\text{dla } u=1 \text{ lub } u=0,$$

dla prognozy stanu granicznego dolnego mamy następujący wzór:

$$\hat{w}_{10}(t) = \sum_k Q_k^{um}(\{0\},t), \tag{8.10}$$

$$\text{dla } u=1 \text{ lub } u=0,$$

oraz dla prognozy stanu granicznego górnego mamy kolejny wzór:

$$\hat{w}_{11}(t) = \sum_k Q_k^{um}(\{V\},t), \tag{8.11}$$

$$\text{dla } u=1 \text{ lub } u=0.$$

Proces $\left(y(t),\ v(t)\right)$ opisuje podaż produktu $y(t)$ podsystemu *P* oraz funkcjonowanie $v(t)$ podsystemu transportowego *T*. Prognozę prawdopodobieństwa zajścia w przyszłej chwili *t* zdarzenia losowego: podaż produktu podsystemu *P* osiąga stan y_k, a podsystem transportowy *T* znajduje się w stanie *u* ($u=1$ – praca, $u=0$ – awaria), obliczamy z następującego wzoru:

$$\hat{w}_{12}(t) = Q_k^{um}\left(\{0\},t\right) + Q_k^{um}\left(\{V\},t\right) + \int_0^V f_k^{um}(z,t)\,\mathrm{d}z. \tag{8.12}$$

Z kolei proces $\left(z(t),\ y(t)\right)$ charakteryzuje funkcjonowanie $z(t)$ magazynu *M* oraz podaż $y(t)$ produktu podsystemu *P*.

Prognozę prawdopodobieństwa zajścia w przyszłej chwili *t* następujących zdarzeń losowych:

– stan poziomu zapasów magazynu *M* nie jest ekstremalny, czyli dla:

$$0 < z(t) < V$$

a podaż $y(t)$ produktu podsystemu *P* osiąga stan y_k, czyli dla:

$$y(t) = y_k,$$

– poziom zapasów podsystemu *M* osiąga stan graniczny dolny – magazyn jest pusty, czyli dla:

$$z(t) = 0$$

a podaż $y(t)$ produktu podsystemu *P* stan y_k, czyli dla:

$$y(t) = y_k,$$

– poziom zapasów podsystemu *M* osiąga stan graniczny górny – magazyn jest zapełniony, czyli dla:

$$z(t) = V$$

a podaż $y(t)$ produktu podsystemu *P* stan y_k, czyli dla:

$$y(t) = y_k,$$

można obliczyć kolejno za pomocą poniższych wzorów:

dla nieekstremalnego poziomu $0 < z(t) < V$ zapasów i poziomu $y(t) = y_k$ mamy następującą prognozę:

$$\hat{w}_{13}(t) = \int_{c_1}^{c_2} f_k^{1m}(z,t)\,\mathrm{d}z + \int_{c_1}^{c_2} f_k^{0m}(z,t)\,\mathrm{d}z, \tag{8.13}$$

dla stanu granicznego dolnego $z(t) = 0$ zapasów i poziomu $y(t) = y_k$ mamy:

$$\hat{w}_{14}(t) = Q_k^{1m}\left(\{0\},t\right) + Q_k^{0m}\left(\{0\},t\right), \tag{8.14}$$

dla stanu granicznego górnego $z(t) = V$ zapasów i poziomu $y(t) = y_k$ mamy:

$$\hat{w}_{15}(t) = Q_k^{1m}\left(\{V\},t\right) + Q_k^{0m}\left(\{V\},t\right). \tag{8.15}$$

Funkcjonowanie $z(t)$ magazynu *M*, wielkości $y(t)$ podaży produktu podsystemu *P* oraz działanie $v(t)$ podsystemu transportowego *T* charakteryzuje trójwymiarowy proces:

$$\left(z(t),\ y(t),\ v(t)\right)..$$

Prognozę prawdopodobieństwa zajścia w przyszłej chwili *t* następujących zdarzeń losowych:

– stan poziomu zapasów magazynu *M* nie jest ekstremalny, czyli dla:

$$0 < z(t) < V$$

podaż produktu podsystemu *P* osiąga stan y_k, czyli dla:

$$y(t) = y_k,$$

a podsystem transportowy *T* znajduje się w stanie u, czyli dla:

$$u = 1 - \text{praca lub } u = 0 - \text{awaria},$$

– poziom zapasów podsystemu *M* osiąga stan graniczny dolny – magazyn jest pusty, czyli dla:

$$z(t) = 0,$$

podaż produktu podsystemu *P* ma stan y_k, czyli dla:

$$y(t) = y_k,$$

a podsystem transportowy *T* jest w stanie *u*, czyli dla:

$$u = 1 - \text{praca lub } u = 0 - \text{awaria},$$

– wielkość zapasów magazynu *M* osiąga stan graniczny górny – magazyn jest zapełniony, czyli dla:

$$z(t) = V,$$

podaż produktu podsystemu *P*ma stan y_k, czyli dla:

$$y(t) = y_k,$$

a podsystem transportowy *T* jest w stanie u, czyli dla:

$$u = 1 - \text{praca lub } u = 0 - \text{awaria},$$

można wyznaczyć kolejno za pomocą wzorów:

dla poziomu zapasów $0 < z(t) < V$ i poziomu $y(t) = y_k$ mamy następującą prgnozę:

$$\hat{w}_{16}(t) = \int_{c_1}^{c_2} f_k^{um}(z,t)\,\mathrm{d}z, \tag{8.16}$$

$$\text{dla } u = 1 \text{ lub } u = 0,$$

dla poziomu zapasów $z(t) = 0$ i poziomu $y(t) = y_k$ mamy kolejną prognozę:

$$\hat{w}_{17}(t) = Q_k^{um}(\{0\},t), \tag{8.17}$$

$$\text{dla } u = 1 \text{ lub } u = 0,$$

oraz dla poziomu zapasów $z(t) = V$ i poziomu $y(t) = y_k$ mamy prognozę postaci:

$$\hat{w}_{18}(t) = Q_k^{um}(\{V\},t), \tag{8.18}$$

$$\text{dla } u = 1 \text{ lub } u = 0.$$

Prognozy (8.1)-(8.18), charakterystyk opisujących funkcjonowanie badanego systemu w przypadku strukturalnego procesu dostawy produktu, obliczamy na podstawie modelu (7.1)-(7.8) dla $l = m$. Jeżeli $t \notin T_m$ i $t > t_0$ dla każdego $t_0 \in T_m$ oraz $t \in T_i^*$, to w celu wyznaczenia tych prognoz postępujemy analogicznie jak w rozdziale 5.

Podkreślić należy, że prognozy (8.1)-(8.18) budowane są tak, że ich wartości w sposób *explicite* zależą od parametrów systemu: $\pi_{ik}^{(l)}$, π_u^{*l}, V, a.

Takie podejście umożliwia śledzenie zmian trajektorii wartości prognoz w zależności od zmian wartości tych parametrów, a więc – przewidywanie zmian w funkcjonowaniu badanego systemu logistycznego wspomagającego centrum usług.

Ponieważ na wartość parametrów: $\pi_{ik}^{(l)}$, π_u^{*l} mają wpływ również czynniki organizacyjne (wymienione w rozdziale 4), zatem stwarza to również możliwość prowadzenia

analizy wpływu racjonalizacji elementów organizacyjnych na wartości badanych charakterystyk systemu (zarówno w aspekcie prognostycznym, jak i – nieprognostycznym), a zatem na efektywność działalności centrum usług.

ZAKOŃCZENIE

Ze względu na wzrost samodzielności podmiotów gospodarczych, funkcjonujących w warunkach rosnącej konkurencji, konieczne staje się wprowadzanie istotnych zmian w sposobach zarządzania nimi oraz w metodach sterowania poziomem konkurencyjności przedsiębiorstw logistycznych. Nowoczesny, innowacyjny proces podejmowania decyzji wymaga opracowywania obiektywnych rozwiązań, które uzyskiwane są na podstawie wyników analizy wiarygodności informacji.

Rozwiązania te otrzymuje się często dzięki zastosowaniu matematycznego modelowania oraz odpowiednich metod matematycznych pozwalających na racjonalizację gospodarowania w wielu obszarach działalności. Złożoność procesu zarządzania pociąga za sobą niezbędność coraz szerszego ich stosowania; przestaje bowiem wystarczać intuicja i doświadczenie decydentów.

Niniejsza praca poświęcona jest badaniu systemów logistycznych wspomagających centrum usług funkcjonujących w różnych obszarach gospodarki. Dokładniej – przedmiotem badania jest system logistyczny, którego podsystemami są: podsystem produkcji (*P*), podsystem transportowy (*T*) oraz magazyn-zbiornik (*M*) i odbiorca (*O*) w centrum usług (CU). Wykorzystano tu podejście modelowe i prognozowanie stanowiące podstawę wykorzystania symulacji komputerowych w logistyce.

W pracy przedstawiłam własne, nowe wyniki badań, dotyczące probabilistycznego opisu rozważanego systemu logistycznego wspomagającego centrum usług oraz ilościowe charakterystyki tego systemu. Opis ten uzyskany jest w czterech wariantach: zarówno w przypadku, gdy poziom zapasów podsystemu *M* sterowany jest zagregowanym procesem dostawy produktu $\left(S\left(za\right)\right)$ (rozdział 2, 3 części II), jak i w przypadku, gdy poziom ten sterowany jest niezagregowanym procesem dostawy produktu $\left(S\left(st\right)\right)$ (rozdział 6, 7 części II). Opisy te uwzględniają zarówno dynamikę parametrów procesu podaży produktu przez podsystem *P*, dynamikę parametrów procesu opisującego funkcjonowanie podsystemu transportowego *T*, jak i różne warianty działania podsystemu *M*.

Otrzymane stochastyczne autorskie opisy funkcjonowania systemu logistycznego wspierającego centrum usług umożliwiają wyznaczenie zdefiniowanych ilościowych charakterystyk tego systemu, np. charakterystyk „wąskiego gardła", wskaźnika oceny deficytu podaży produktu dla odbiorcy *O*, wskaźnika oceny strat produkcyjnych nadawcy *P*, wskaźnika oceny stopnia wykorzystania podsystemu *M* w badanym systemie, wskaźników dotyczących występowania barier w podsystemie *M*, wskaźnika opisującego poprawność zaprojektowania systemu (rozdział 4, 5, 8 części II).

Wyniki badań przedstawione w części II pracy w rozdziałach 2, 3, 6, 7 dają również możliwość wyznaczenia prognoz określonych charakterystyk funkcjonowania systemu logistycznegi (rozdział 5, 8 części II). Prognozy te mogą wpłynąć na czynniki, od których w sposób istotny zależy poziom gospodarczej i finansowej konkurencyjności przedsiębiorstw logistycznych.

Warto podkreślić, że w przedstawionym podejściu metodologicznym zarówno podane charakterystyki ilościowe systemu, jak i ich prognozy, zależą *explicite* od parametrów systemu, co jest niewątpliwie zaletą takiego podejścia. Umożliwia ono obserwowanie zmian wartości tych wielkości w zależności od zmian wartości parametrów badanego systemu. Można więc oddziaływać na te wartości – zarówno w aspekcie prognostycznym, jak i nieprognostycznym, a tym samym zwiększać efektywność funkcjonowania systemu logistycznego w celu podwyższenia jego konkurencyjności,

Można także przeprowadzać analizę wpływu racjonalizacji elementów organizacyjnych całego systemu, które mają wpływ na parametry procesu podaży produktu

przez podsystem P oraz na parametry funkcjonowania podsystemu transportowego T i na wartość zdefiniowanych charakterystyk, co dostarcza dodatkowych przesłanek dla racjonalizacji działania systemu wspomagającego centrum usług.

Rozpatrywany system logistyczny wspomagający centrum usług jest na tyle uniwersalny, że może on być zastosowany wszechstronnie w różnych obszarach gospodarki.

Przedstawione w pracy moje autorskie probabilistyczne opisy dynamiczne funkcjonowania analizowanego systemu logistycznego, ilościowe charakterystyki działania tego systemu oraz ich prognozy są narzędziami, za pomocą których można badać i optymalizować efektywność działania rozważanego systemu, a zarazem centrum usług i wpływać w ten sposób na poprawę konkurencyjności podmiotu.

Tego typu narzędzia tworzą dla programistów podstawy teoretyczno-metodologiczne budowanych symulacyjnych programów komputerowych informatycznego wspomagania procesu decyzyjnego. Rozwinięciem systemów wspomagania decyzji są systemy doradcze, nazywane również ekspertowymi, które są przyszłością zarządzania. Systemy te, oprócz zadań związanych z przygotowaniem i opracowywaniem danych potrzebnych do podejmowania bieżących decyzji, coraz częściej zawierają zadania związane z podejmowaniem decyzji gospodarczych i finansowych.

Uzyskane wyniki badań są zilustrowane na przykładzie dwustanowego procesu podaży produktu. Otrzymane są wzory wyrażające *explicite* zależność charakterystyk systemu od parametrów systemu oraz dokonane są ich analizy.

Przedstawiony jest także przykład liczbowy, w którym dla określonych parametrów systemu wyznaczone są wskaźniki oceny strat produkcyjnych systemu (odbiorcy O i nadawcy P), wskaźnik oceny stopnia wykorzystania podsystemu M, wskaźniki opisujące stany graniczne (bariery) podsystemu M wraz ze sprawdzeniem poprawności zaprojektowania systemu.

W celu zilustrowania różnicy podejść metodologicznych do zagadnienie konstruowania prognozy podany jest przykład wyznaczenia prognozy procesu opisującego wielkość wydobycia węgla w kopalni odkrywkowej z zastosowaniem elementów analizy harmonicznej.

W przypadku, gdy parametry procesu podaży produktu przez podsystem P oraz procesu opisującego funkcjonowanie podsystemu transportowego T nie są znane, należy dokonać ich oceny na podstawie próby.

Zauważmy, że gdy liczba stanów procesu podaży jest mała, to wykorzystanie w praktyce uzyskanych wyników badania nie przedstawia większych trudności – można wtedy przy użyciu metod analitycznych otrzymać interesujące nas relacje wyrażające *explicite* odpowiednie wielkości bezpośrednio za pomocą parametrów badanego systemu.

W przeciwnej sytuacji, a więc gdy liczba stanów procesu podaży produktu jest duża, zachodzi konieczność zastosowania techniki komputerowej wspomaganej odpowiednimi metodami numerycznymi z wykorzystaniem przedstawionego w pracy postępowania.

W pracy przedstawiłam rozwiązanie następujących zagadnień:

1) uzyskanie probabilistycznego opisu badanego systemu logistycznego wspomagającego centrum usług w przypadku, gdy poziom wypełnienia podsystemu M sterowany jest zagregowanym procesem dostawy produktu ($S(za)$).

   Opis ten:

   po pierwsze:

   – uwzględnia zarówno dynamikę parametrów procesu podaży produktu przez podsystem P, jak i – różne warianty działania podsystemu M,

   po drugie:

– daje możliwość skonstruowania i wyznaczenia ilościowych charakterystyk funkcjonowania systemu $S(za)$,

po trzecie:

– umożliwia uzyskanie prognoz charakterystyk opisujących działanie systemu $S(za)$,

2) określenie i wyznaczenie ilościowych charakterystyk wąskiego gardła systemu $S(za)$ oraz innych wskaźników opisujących działanie i poprawność zaprojektowania tego systemu,
3) uzyskanie prognoz procesów charakteryzujących funkcjonowanie systemu $S(za)$, generowanych zbudowanym opisem probabilistycznym,
4) otrzymanie stochastycznego opisu rozważanego systemu logistycznego wspomagającego centrum usług w przypadku, gdy poziom wypełnienia podsystemu *M* sterowany jest strukturalnym procesem dostawy produktu ($S(st)$).

   Opis ten posiada ww. cechy podane w punkcie 1), czyli dla $S(za)$ oraz uwzględnia *explicite* parametry (wraz z ich dynamiką) podsystemu transportowego *T*,
5) określenie wskaźników opisujących funkcjonowanie systemu $S(st)$, zależnych od parametrów tego systemu,
6) uzyskanie prognoz charakterystyk opisujących działanie systemu $S(st)$, generowanych zbudowanym modelem.

Dzięki zaproponowanej mojej autorskiej nowej, prekursorskiej metodyce obliczania prognoz (zob. rozdz. 5 i 8) – opartej na dwóch autorskich dynamicznych modelach probabilistycznych (zob. rozdz. 3 i 7) opisujących funkcjonowania SL wspomagającego CU – istnieje możliwość budowy prognoz usprawniających zarządzanie CU. Prognozy takie zależą od parametrów działania systemu, a to daje możliwość analizy jakości zarządzania CU oraz badania konkurencyjności przedsiębiorstw logistycznych za pomocą korekty wartości tych parametrów, a także możliwość zastosowania komputerowych technik symulacyjnych.

Prognozy tych charakterystyk (procesów) pozwalają śledzić w czasie jakość działania CU za pomocą korekty wartości parametrów, od których te prognozy zależą. Ponadto zadając, w odpowiednio zbudowanym programie informatycznym, różne wartości parametrów badanego systemu można uzyskiwać odpowiednio różne komputerowe symulacje dotyczące funkcjonowania centrum usług, a tym samym dokonywać wyboru najbardziej optymalnych wersji dla zapewnienia efektywności procesu decyzyjnego podczas zarządzania centrum usług w celu poprawy gospodarczej i finansowej konkurencyjności przedsiębiorstw logistycznych.

SPIS RYSUNKÓW

Rys. 1. Podsystem logistyczny o szeregowej strukturze funkcjonalnej. 7
Rys. 2. Podsystem logistyczny o równoległej strukturze funkcjonalnej. 7
Rys. 3. Podsystem o szeregowo - równoległej strukturze funkcjonalnej. 8
Rys. 4. Podsystem o równoległo – szeregowej strukturze funkcjonalnej. 9
Rys. 5. Centrum usług. 18
Rys. 6. System logistyczny wspomagający centrum usług. 18
Rys. 7. Schemat funkcjonowania badanego systemu logistycznego wspomagającego centrum usług przedsiębiorstw logistycznych. 19
Rys. 8. Szczegółowy schemat funkcjonowania systemu logistycznego wspomagającego centrum usług przedsiębiorstw logistycznych. 19
Rys. 9. Realizacja procesu $z(t)$ 22
Rys. 10. Ilustracja graficzna relacji (2.8), $t \in T_l, t+\tau \in T_l$ 28
Rys. 11. Ilustracja graficzna relacji (2.9), $t \in T_l, t+\tau \in T_l$ 28
Rys. 12. Ilustracja graficzna relacji (2.37), $t \in T_l,\ t+\tau \in T_l$ 37
Rys. 13. Ilustracja graficzna relacji (2.38), $t \in T_l,\ t+\tau \in T_l$ 38
Rys. 14. Ilustracja graficzna relacji (2.56), $t \in T_l,\ t+\tau \in T_l$ 43
Rys. 15. Ilustracja graficzna relacji (2.57), $t \in T_l,\ t+\tau \in T_l$ 43
Rys. 16. Struktura podsystemu transportowego. 51
Rys. 17. Prawdopodobieństwo deficytu podaży produktu lub strat nadawcy dla $S(za)$ 58
Rys. 18. Prawdopodobieństwo deficytu podaży produktu lub strat nadawcy dla $S(st)$. 105

SPIS TABEL

Tabela 1. Wielkość wydobycia węgla w megakwintalach w kopalni odkrywkowej X w poszczególnych miesiącach w okresie sześciu lat $\{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$. 67

Tabela 2. Współczynniki A_i, B_i części zdeterminowanej $c(t)$ oraz wielkość wpływu poszczególnych harmonik na ogólną zmianę procesu $Y(t)$ 69

Tabela 3. Zbiór wartości funkcji $\hat{R}(\tau)$ dla $\tau \le 71$ 70

Tabela 4. Wartości współczynników szeregu trygonometrycznego (5.25) opisującego estymator $\hat{R}(\tau)$ 71

Tabela 5. Prognoza wielkości wydobycia $Y(t)$ w kopalni odkrywkowej X na lata $\{t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}\}$ 72

BIBLIOGRAFIA

[1] Abt S.: *Systemy logistyczne w gospodarowaniu. Teoria i praktyka logistyki*, Wyd. Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 1996.

[2] Abt S.: *Zarządzanie logistyczne w przedsiębiorstwie*, PWE, Warszawa 1998.

[3] *Alternatywne źródła pozyskiwania danych statystycznych Materiały Seminarium SPJS'90*, Systemy Informatyczne, nr 2, Ośrodek Badawczo-Rozwojowy Statystyki GUS, Warszawa 1990.

[4] Banaszak Z., Jampolski L.S.: *Komputerowo wspomagane modelowanie elastycznych systemów produkcyjnych*, WNT, Warszawa 1991.

[5] Bartkowiak A.: *Podstawowe algorytmy statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1979.

[6] Beer T.: *Bushfire Rate-of-Spread Forecasting: Deterministic and Statistical Approaches to Fire Modeling*, Journal of Forecasting, Vol. 10, No. 3, 1991.

[7] Beier F.J., Rutkowski K.: *Logistyka*, Wyd. Szkoła Główna Handlowa, Warszawa 1995.

[8] Bielińska E.M.: *Minimum Variance Prediction of Bilinear Time Series: Direct and Adaptive Version*, Journal od Forecasting, Vol. 12, No. 6, 1993.

[9] Bodo G., Cividini A., Signorini L.F.: *Forecasting the Italian Industrial Production Index in Real Time*, Journal of Forecasting, Vol. 19, No. 3, 1991.

[10] Bojarski A.J.: *Matematyka dla ekonomistów*, PWE, Warszawa 1996.

[11] Bołt T., Ossowski J.: *Prognozowanie na podstawie modeli logarytmiczno-liniowych*, Przegląd Statystyczny, nr 3-4, 1992.

[12] Borowska M. (red. Kozaczka M.): *Przedsiębiorstwo wczoraj, dziś i jutro*, w: Przedsiębiorstwo XXI wieku Szanse i Zagrożenia, Wydawnictwo Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego, Lublin 2013.

[13] Borowska M., Galanc T., Jaśniewicz Z.: *Własności zmian poziomów zapasów sterowanego parą procesów stochastycznych*, w: Studia Ekonomiczne AE, Katowice 2000.

[14] Borowska M., Galanc T.: *Niedeterministyczna analiza funkcjonowania pewnego systemu o stochastycznym wejściu*, w: Studia Ekonomiczne AE, Katowice 2000.

[15] Borowska M.: *Prognozowanie na podstawie praw funkcjonowania systemu. Analiza działania systemu w przypadku zagregowanego wejścia*, w: Społeczeństwo i rodzina Stalowowolskie Studia Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego, Nr 2 (1/2005).

[16] Borowska M.: *Prognozowanie na podstawie praw funkcjonowania systemu. Prognozowanie procesów opisujących działanie systemu w przypadku zagregowanego wejścia*, w: Przegląd Prawno-Ekonomiczny, Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II, Wydział Zamiejscowy Nauk o Społeczeństwie w Stalowej Woli, Nr 2 (1/2008).

[17] Borowska M.: *Prognozowanie na podstawie praw funkcjonowania systemu. Analiza funkcjonowania systemu w przypadku strukturalnego procesu dostawy produktu*,

w: Przegląd Prawno-Ekonomiczny, Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II, Wydział Zamiejscowy Prawa i Nauk o Gospodarce w Stalowej Woli, Nr 18 (1/2012).

[18] Borowska M.: *Prognozowanie na podstawie praw funkcjonowania systemu. Prognozowanie procesów opisujących działanie systemu w przypadku strukturalnego procesu dostawy produktu*, w: Przegląd Prawno-Ekonomiczny, Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II, Wydział Zamiejscowy Prawa i Nauk o Społeczeństwie w Stalowej Woli, Nr 29 (4/2014).

[19] Borowska M.: *Prognozowanie na podstawie praw funkcjonowania systemu*, Wydawnictwo Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. prof. Stanisława Tarnowskiego w Tarnobrzegu, Tarnobrzeg 2016.

[20] Borowska M.: *Probabilistyczne modele działania systemu i ich zastosowanie do budowania prognoz efektywnego funkcjonowania przedsiębiorstwa usługowego*, artykuł (2017r.) w języku rosyjskim w czasopiśmie elektronicznym e-Journal VFU pod adresem: https://ejournal.vfu.bg/bg/administrationandmanagment.html.

[21] Borowska M.: *Metodyka budowania prognoz na podstawie dwóch probabilistycznych modeli działania systemu produkcyjno-zaopatrzeniowego umożliwiających poprawę efektywności funkcjonowania systemu*, w: I. Britchenko, Y. Polishchuk (red.): Development of small and medium enterprises: The EU and East-Partnership Countries Experience, State Higher Vocational School in Tarnobrzeg and Higher School of Social and Economic in Przeworsk, Tarnobrzeg (Poland) 2018.

[22] Borowska M.: *Modelowanie przepływu strumieni ładunków a problem kolejek w systemach logistycznych*, w: M. Bezpartochno, I. Britchenko (red.): Conceptual aspects management of competitiveness the economic entities, Higher School of Social and Economic in Przeworsk, Przeworsk (Poland) 2019.

[23] Borowska M.: *Quantitive methods in the field economic sciences* – Mathematics and Informatics Journal w: Journal of Scientific Papers VUZF REVIEW, Vol. 5 nr 2 (June 2020) VUZF University, ISBN 2534-9228, ss. 22-37.

[24] Borowska M.: *Strategiczne uwarunkowania zapasami w przedsiębiorstwach produkcyjnych i handlowych*, w: M. Bezpartochno, I. Britchenko (red.): Conceptual aspects management of competitiveness the economic entities, Higher School of Social and Economic in Przeworsk, Przeworsk (Poland) 2019.

[25] Borowska M.: *The role of logistics in modern economy* – Uniwersytet VUZF w Bułgarii, w: Collective monograph scientific edited by M. Bezpartochnyi: New trends in the economic systems management in the context of modern global, VUZF of Finance, Business and Entrepreneurship (Sofia, Bułgaria) 2020, ISBN 978-954-8590-85-3, ss. 100-110.

[26] Botez M.E.: *Mathematical Tools in Forecasting*, Uniwersitatea Bucuresti, Bukareszt 1975.

[27] Box G.E.P., Jenkins G.M.: *Analiza szeregów czasowych*, PWN, Warszawa 1983.

[28] Bragg S.M.: *Wskaźniki w analizie działalności przedsiębiorstwa*, Wolters Kluwer Polska Sp. z o.o., Warszawa 2010.

[29] Brasil G.H., Souza R.C.: *A Bayesian Approach to Modelling Stochastic Cycles*, Journal of Forecasting, Vol. 12, No. 6, 1993.

[30] Bremond J., Couet J., Salort M.: *Kompendium wiedzy o eokonomii*, WN PWN, Warszawa 2005.

[31] Brucker P.: *Complexity Results for Shop Problems*, in: Mathematical Programming, North-Holland, Amsterdam 1984.

[32] Burkard R.E., Hamacher M.W., Rothe G.: *Approximation of Convex Funkctions and Application to Separable Convex Program*, Preprint 154, 1989.

[33] Bylinko L., Jakubiec M., Kubański M.: *Zarządzanie logistyką i jakością*, Wyd. Naukowe ATH, Bielsko Biała 2012.

[34] *Catastrophe or New Society?* A Latin American World Model, International Der. Research Center, Canada 1976.

[35] Cichocki K., Wojciechowski W.: *Metoda prognozowania zmiennych w czasie współczynników inwestycyjnych*, Przegląd Statystyczny, nr 1-2, 1990.

[36] Ciesielski M. (red.): *Logistyka w biznesie*, PWE, Warszawa 2006.

[37] Ciesielski M. (red.): *Rynek usług logistycznych*, Difin, Warszawa 2005.

[38] Cieślak M., *Prognozowanie gospodarcze*, AE, Wrocław 1993.

[39] Cieślak M.: *Demografia. Metody analizy i prognozowania*, PWN, Warszawa 1992.

[40] Cieślak M.: *Nieklasyczne metody prognozowania*, PWN, Warszawa 1983.

[41] Cieślak M.: *Prognozowanie w zarządzaniu przedsiębiorstwem*, AE, Wrocław 1992.

[42] Coyle J. J., Bardi E. J., Langley C. J. Jr.: *Zarządzanie logistyczne*, PWE, Warszawa 2010.

[43] Czerwiński Z., Guzik B.: *Prognozowanie ekonometryczne*, PWE, Warszawa 1980.

[44] Dittmann P.: *Funkcje segmentowe w prognozowaniu gospodarczym*, Badania Operacyjne i Decyzje, nr 4, 1991.

[45] Dittmann P.: *O dezagregacji prognoz w sytuacji niedostatecznej informacji*, Przegląd Statystyczny, nr 1, 1992.

[46] Długosz J. (red.): *Nowoczesne technologie w logistyce*, PWE, Warszawa 2009.

[47] Dobrzańska I.: *Wymiar Hausdorffa jako narzędzie predykcji krokowej*, Badania Operacyjne i Decyzje, nr 2, 1991.

[48] Elmaghraby S.E.: *The Determination of Optimal Activity Duration in Project Scheduling*, Ind. Eng. Vol. 19, No. 1, 1968.

[49] Farnum N.R., Stanton W,: *Quantitative Forecasting Methods*, Boston, PWS-Kent Publishing Company, 1989.

[50] Faure R., Boss J.-P., Le Garff A.: *Badania operacyjne*, PWN, Warszawa 1982.

[51] Forrester J.W.: *Principles of System*, Cambridge 1972, Wright-Alle Press.

[52] Forrester J.W.: *Urban Dynamics*, Cambridge 1970, The M.I.T. Press.

[53] Forrester J.W.: *World Dynamics*, Cambridge 1971, Wright-Allen Press.

[54] Frąś J.: *Normalizacja i zarządzanie jakością w logistyce*, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 2015.

[55] Galanc T., Mikuś J., Jaśniewicz Z.: *Estimate of Object's State Prediction Operator by Means if Indirect Measurements*, Amse Rev., Vol. 22, No. 2, 1992.

[56] Galanc T., Mikuś J., Jaśniewicz Z.: *Ground Tank Technical Efficiency Forecasting*, Model. Simul. a. Control, Vol. 40, No. 2, 1991.

[57] Galanc T., Mikuś J.: *Aggregation of Forecasts*, Adv. Model. a. Analysis, Amse Press, Vol. 32, 1992.

[58] Galanc T., Mikuś J.: *Analityczne metody badania procesu innowacji technicznych*, Ośrodek Badań Prognostycznych Politechniki Wrocławskiej, Raport nr 102, Wrocław 1978.

[59] Galanc T., Mikuś J.: *Matematyczny model procesu innowacji*, Przegląd Statystyczny, nr 1, 1978.

[60] Galanc T., Mikuś J.: *O pewnej metodzie normatywnego prognozowania jakościowego*, Badania Operacyjne i Decyzje, nr 3, 1991.

[61] Galanc T., Mikuś J.: *O pewnej metodzie prognozowania procesów niestacjonarnych*, w: Przegląd Statystyczny, nr 1, 1991.

[62] Galanc T., Mikuś J.: *Remarks on the Application of Statistical Games to Technological Development Forecasting*, Technological Forecasting and Social Change, 19, 1981.

[63] Galanc T., Mikuś J.: *The Method for Constructing a Combined Forecast en Bloc*, Adv. Model. a. Analysis, Vol. 35, No. 4, 1992.

[64] Galanc T.: *Metody wspomagania procesu zarządzania, cz. II, Decyzyjne modele liniowe i prognozowanie ekonometryczne*, Wrocław 1993.

[65] Galanc T.: *Prognozowanie trajektorii systemu cybernetycznego wyznaczonych przez cel sterowania*, w: Prace Naukowe Ośrodka Badań Prognostycznych Politechniki Wrocławskiej nr 16, seria: Monografie nr 4, Wrocław 1984.

[66] Garczyński D.: *Systemy ekspertowe – przyszłość zarządzania?*, Badania Operacyjne i Decyzje, nr 1, 1993.

[67] Gichman I.I., Skorochod A.W.: *Wstęp do teorii procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa 1968.

[68] Gołembska E.: *Logistyka w gospodarce światowej*, Wyd. C.H.Beck, Warszawa 2003.

[69] Gołemska E. (red.): *Kompendium wiedzy o logistyce*, Wyd. PWN, Warszawa – Poznań 1999.

[70] Gołemska E.: *Podstawy logistyki*, Wyd. WSK, Warszawa 2008.

[71] Grabiński T., Wydymus S., Zeliaś A.: *Metody prognozowania rozwoju społeczno-gospodarczego*, PWE, Warszawa 1983.

[72] Grabiński T., Wydymus S., Zeliaś A.: *Prognozowanie procesów społeczno-ekonomicznych*, PWN, Warszawa 1989.

[73] Granger C.W.J.: *Forecasting in Business and Economics*, San Diego, California: Academic Press, 1989.

[74] Gudehus T.: *Grundlagen der Kommissioniertechnik*, Verlag W. Girardet, Essen 1973.

[75] Hanke J.E., Reitsch A.G.: *Business Forecasting*, 4th ed. Needham Reghts: Allyn and Bacon, 1992.

[76] Haustein H.D.: *Prognozy gospodarcze, zagadnienia podstawowe, modele*, PWE, Warszawa 1972.

[77] Hellwig Z., Helpern S., Miszczak W.: *Zagadnienia programowania wzrostu gospodarczego*, Badania Operacyjne i Decyzje, nr 4, 1993.

[78] Hellwig Z.: *Efekt katalizy w modelu ekonometrycznym, jego wykrywanie i usuwanie*, Przegląd Statystyczny, nr 1, 1977.

[79] Hellwig Z.: *Problem optymalnego wyboru predykant*, w: Przegląd Statystyczny, nr 3-4, 1969.

[80] Hellwig Z.: *Regresja liniowa i jej zastosowanie w ekonomii*, PWE, Warszawa 1963.

[81] Hellwig Z.: *Schemat budowy prognozy statystycznej metodą wag harmonicznych*, w: Przegląd Statystyczny, nr 4, 1967.

[82] Hellwig Z.: *Teoria prognozy*, Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu 1977.

[83] Hellwig Z.: *Warning Forecasts*, w: Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, nr 301, 1985.

[84] Hellwig Z.: *Zastosowanie metody taksonomicznej do typologicznego podziału krajów ze względu na poziom ich rozwoju oraz zasoby i strukturę wykwalifikowanych kadr*, Przegląd Statystyczny, nr 4, 1968.

[85] Hellwig Z.: *Zastosowanie przekształcenia ortogonalnego do wyznaczenia dopuszczalnych wartości zmiennych objaśniających w modelu ekonometrycznym*, Przegląd Statystyczny, nr 3, 1974.

[86] Holden K., Peel D.A., Thompson J.L.: *Economic Forexasting. An Introduction*, Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

[87] Hovrey E.P., Haymans S.H., Donihue M.R.: *Merging Monthly and Quarterly Forecasts: Experience with MQEM*, Journal of Forecasting, Vol. 12, No. 3, 1991.

[88] Jacyna M. (red.): *System logistyczny Polski*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2012.

[89] Jakeman A.J., Thomas G.A., Dietrich C.R.: *System Identification and Validation for Output Prediction of a Dynamic Hydrologic Proces*, Journal of Forecasting, Vol. 10, No. 3, 1991.

[90] Janiak A., Grabowski J.: *Optymalizacja sekwencji operacji z rozdziałem zasobów w dyskretnych procesach produkcyjnych*, Z. Nauk. Politechniki Śląskiej, nr 54, 1980.

[91] Janiak A.: *Dokładne i przybliżone algorytmy szeregowania zadań i rozdziału zasobów w dyskretnych procesach przemysłowych*, Prace Naukowe Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej nr 87, seria: Monografie nr 20, Wrocław 1991.

[92] Janiak A.: *Problem kolejnościowy gwiazdowy z rozdziałem zapasów*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, nr 63, 1982.

[93] Jaworski J., Mytlewski A.: *Funkcjonowanie systemów logistycznych*, Prace Naukowe WSB w Gdański, Gdańsk 2009.

[94] Jünemann R.: *Materialfluß und Logistik. Systemtechnische Grundlagen mit Praxisbeispielen*, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - London - Paris - Tokyo - HongKong 1989.

[95] Kania-Gospodarowicz A.: *Zastosowanie technik scenariuszowych do prognozowania*, w: Prognozowanie w zarządzaniu przedsiębiorstwem, Wrocław, Wrocławska Biblioteka Współczesnego Menedżera, 1991.

[96] Kendall M., Stuart A.: *Mnogomernyj statističeskij analiz i vremennye rjady*, Izd. Nauka, Moskva 1976.

[97] Kildiszew G., Frenkel A.: *Analiza szeregów czasowych i pro*, PWN, Warszawa 1976.

[98] Kisperska-Maroń D., Krzyżanek S.: *Logistyka*, Biblioteka logistyki, Poznań 2009.

[99] Klein L.R.: *Wykłady z ekonometrii*, PWE, Warszawa 1978.

[100] Klukowski L.: *Prognozowanie szeregów czasowych na podstawie markowskiego trendu segmentowego*, Przegląd Statystyczny, nr 1, 1992.

[101] Korzeń Z.: *Logistyczne systemy transportu bliskiego i magazynowania*, t. 2: Projektowanie. Modelowanie. Zarządzanie, Wyd. ILiM, Poznań 1999.

[102] Korzeń Z.: *Podstawy logistyki*, Wyd. Politechniki Wrocławskiej IKiEM, Wrocław 1995.

[103] Kowalczuk A.: *Analiza konkurencyjności*, w: Institute of Economic Research Working Papers No. 64/2015.

[104] Krawczyk I.: *Scenariusz jako metoda prognozowania*, Wiadomości Statystyczne, nr 1, 1990.

[105] Krawczyk S.: *Zarządzanie procesami logistycznymi*, PWE, Warszawa 2001.

[106] Król M.: *O wskaźnikach oceny niekorzystnych zjawisk w pracy pewnego systemu gospodarki zapasami*, Badania Operacyjne i Decyzje, nr 4, 1992.

[107] Król M.: *Ocena efektywnego wykorzystania magazynu-zbiornika w pewnym systemie gospodarki zapasami*, Badania Operacyjne i Decyzje, nr 3, 1992.

[108] Król M.: *Praktičeskie aspekty stochastičeskogo analiza funkcionirovanija sistemy „nepreryvnyj transport-chranenie"*, Sbornik Naučych Trudov MESI „Metody matematičeskogo modelirovanija ekonomiki", Moskva 1989.

[109] Król M.: *Stochastičeskij analiz funkcionirovanija sistemy „nepreryvnyj transport-chranenie"*, sb: Proektirovanie informacionnych system, M. MESI, 1989.

[110] Kukuła K. (red.): *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*, PWN, Warszawa 2001.

[111] Kupiec L.: *Podstawy logistyki*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Finansów i Zarządzania, Białystok 2010.

[112] Lam Yeh.: *Optimal Control of a Finite Dam – discounted cost case*, Kexue Tongbao 32(2), 1987.

[113] Latif A., King M.L.: *Linear Regression Forecasting in the Presence of AR (1) Disturbance*, Journal of Forecasting, Vol. 12, No. 6, 1993.

[114] Lee J.C., Tsao S.L.: *On Estimation and Prediction Procedures for AR (1) Models with Power Transformation*, Journal of Forecasting, Vol. 12, No. 6, 1993.

[115] Löfgren K.G., Ranneby B., Sjöstedt S.: *Forecasting the Business Cycle without Using Minimum Autocorrelation Factors*, Journal Forecasting, Vol. 12, No. 6, 1993.

[116] Macha E., Niesłony A.: *Niezawodność systemów mechatronicznych*, Oficyna Wyd. Politechniki Opolskiej, Opole 2010.

[117] Marcinkowski J.: *Rozkłady prawdopodobieństwa przydatne w rozwiązywaniu problemów transportu*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1997.

[118] Maryjański A.: *Logistyka w sytuacjach kryzysowych. Pojęcie i zadania logistyki wojskowej*, Wyd. WSK, Warszawa 2007.

[119] Meadows D.: *The Limits to the Growth*, Universe Books, New York 1972.

[120] Mesarowic M.D., Pestel E.: *Mankind at the Turning Point*, New York 1974.

[121] Migdalski J. (red.): *Poradnik niezawodności*, T. 1, Wyd. „WEMA", Warszawa 1982.

[122] Mikuś J.: *Prognozowanie stanów systemu cybernetycznego w warunkach niepełnej informacji o zakłóceniach*, w: Prace Naukowe Ośrodka Badań Prognostycznych Politechniki Wrocławskiej nr 15, seria: Monografie nr 3, Wrocław 1984.

[123] Mills T.C.: *Estimating Trend Growth Rates of the U.K. Monetary Aggregates*, Journal of Forecasting, Vol. 10, No. 3, 1991.

[124] Milo W.: *Analiza szeregów czasowych*, UŁ, Łódź 1983.

[125] Milo W.: *Szeregi czasowe*, PWE, Warszawa 1990.

[126] Moore P.G.: *Wprowadzenie do badań operacyjnych*, WNT, Warszawa 1973.

[127] Murphy P.R. jr., Wood D.F.: *Nowoczesna logistyka*, Wyd. Helion, Gliwice 2011.

[128] Niziński S., Żurek J.: *Logistyka ogólna*, Wyd. Komunikacji i Łączności, Warszawa 2011.

[129] Nowak E.: *Zarys metod ekonometrii*, PWN, Warszawa 1994.

[130] Nowakowski T.: *Niezawodność systemów logistycznych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2011.

[131] Ostasiewcz S.: *Metody dyskryminacyjne w prognozowaniu dyskretnym*, Komitet Statystyki i Ekonometrii PAN, Ossolineum, Wrocław 1989.

[132] Ostasiewicz S.: *Prognozowanie dyskretnej zmiennej losowej*, AE, Wrocław 1974.

[133] Ostasiewicz S.: *Wykorzystanie metod dyskryminacyjnych w prognozowaniu dyskretnym*, Prace Naukowe AE, nr 232, Monografie i Opracowania nr 14, Wrocław 1983.

[134] Parmenter D.: *Kluczowe wskaźniki efektywności (KPI). Tworzenie, wdrażanie i stosowanie*, Wyd. Helion, Gliwice 2015.

[135] Pasik-Duncan B.: *Predykcja zagregowanego procesu autoregresji*, Przegląd Statystyczny, nr 4, 1990.

[136] Pawłowski Z.: *Prognozy ekonometryczne*, PWN, Warszawa 1973.

[137] Pawłowski Z.: *Zasady predykcji ekonometrycznej*, PWN, Warszawa 1982.

[138] Pfohl H.Ch.: *Systemy logistyczne. Podstawy organizacji i zarządzania*, Wyd. Biblioteka Logistyka. Poznań 1998.

[139] Piasecki S. *Podstawy logistyki*, WNT, Warszawa 2012.

[140] Podgórska M.: *Prognozowanie struktury za pomocą modelu odnowy*, Przegląd statystyczny, nr 2, 1989.

[141] Pułaska-Turyna B.: *Statystyka dla ekonomistów*, Difin SA, Warszawa 2011.

[142] Rogalska D., Tomaszewicz A.S.: *Metoda optymalizacji zapasów surowców w przypadku nieregularnych dostaw*, Przegląd Statystyczny, nr 1-2, 1990.

[143] Rowecki S.: *Modelownie procesów losowych w systemach rozwoju. Studium diagnostyczno-prognostyczne, cz. I. Podstawy teoretyczne, cz. II. Diagnoza i prognoza potencjału intelektualnego Polski w perspektywie XXI stulecia*, Ośrodek Badań Prognostycznych Politechniki Wrocławskiej, Raport nr 31B, Wrocław 1979.

[144] Rydzkowski W. (red.): *Usługi logistyczne. Teoria i praktyka*, Wyd. ILiM. Poznań 2011.

[145] Santarek K., Strzelczyk S.: *Elastyczne systemy produkcyjne*, WNT, Warszawa 1989.

[146] Sikora W.: *Metoda quasi-baz dla problemu transportowo-produkcyjnego z wypukłą funkcją kosztów*, Przegląd Statystyczny, nr 3, 1990.

[147] Sikora W.: *Problem transportowy z losowym popytem odbiorców*, Przegląd Statystyczny, nr 3-4, 1992.

[148] Skowronek Cz., Sarjusz-Wolski Z.: *Logistyka w przedsiębiorstwie*, PWE, Warszawa 2008.

[149] Sokólski M.: *Technologie usług magazynowania. CL Consulting i Logistyka*, Oficyna Wydawnicza NDiO, Wrocław 2013.

[150] Sowiński J.: *Zastosowanie modeli MRK w prognozowaniu procesów gospodarczo-technicznych*, Badania Operacyjne i Decyzje, nr 2, 1991.

[151] Szymonik A., Nowak I.: *Współczesna logistyka*, Difin SA, Warszawa 2018.

[152] Tanasev W.S., Solsov J.N., Strusevič J.M.: *Teorija raspisanij*, Mnogostadnye sistemy, Nauka, Moskva 1981.

[153] Tinbergm I., *Resgaping the International Order*, 1976.

[154] Tomaszewicz Ł.: *Zintegrowane modele gospodarki narodowej*, PWE, Warszawa 1983.

[155] Twaróg J.: *Mierniki i wskaźniki logistyczne*, Wyd. ILiM, Poznań 2003.

[156] Wallis K.F., Whitley J.D.: *Sources of Error in Forecasts and Expectations: U.K. Economic Models, 1984-1988*, Journal of Forecasting, Vol. 12, No. 3, 1991.

[157] Welfe A.: *Rynek w warunkach inflacji. Studium ekonometryczne*, UŁ, Łódź 1990.

[158] Welfe W.: *The Unbalanced Ekonometric Macromodels Exemplified by the Model W-1*, *Computing Equilibria – How and Why*, North-Holand – PWN, Amsterdam – Warszawa 19.

[159] Woźniak A.: *Badania operacyjne w logistyce i zarządzaniu*, PWSZ, Nowy Sącz 2010.

[160] Woźniak M., Zeliaś A.: *O pewnych metodach budowy krótkookresowej prognozy na podstawie szeregów czasowych z wahaniami sezonowymi*, Przegląd Statystyczny, nr 1, 1971.

[161] Wydymus S.: *Ekonometryczne metody budowy prognoz dla przemysłu uspołecznionego Polski*, AE, Kraków 1976.

[162] Wydymus S.: *Średniookresowe prognozy produkcji globalnej wybranych gałęzi przemysłu lekkiego*, w: Przegląd Statystyczny, nr 3, 1973.

[163] Zadora K.: *O predykcji punktów zwrotnych trendu i ustalaniu horyzontu prognozy*, Przegląd Statystyczny, nr 1, 1969.

[164] Zadora K.: *O predykcji szeregów czasowych metodą wyrównywania wykładniczego*, Przegląd Statystyczny, nr 2, 1969.

[165] Zawadzki J.: *Ekonometryczne metody prognozowania w przedsiębiorstwie*, Uniwersytet Szczeciński, Rozprawy i Studia, t. 58, Szczecin 1989.

[166] Zeliaś A.: *Metody budowy długookresowej prognozy statystycznej*, w: Przegląd Statystyczny, nr 1, 1972.

[167] Zielaś A.: *Ekonometryczne metody budowy prognoz*, WSE, Kraków 1970,

[168] Zielaś A.: *Teoria prognozy*, PWE, Warszawa 1979.

[169] Zielaś A.: *Z problematyki badania współliniowości w modelach ekonometrycznych*, Przegląd Statystyczny, nr 2, 1977.